Examen

Les exercices sont indépendants. Les documents ne sont pas autorisés.

EXERCICE 1. – Soient $G = (X, E)$ un graphe non orienté simple et sans boucle, Y une partie non vide de X et y un sommet. On note

- $d(y)$ le degré de y dans G,
- $\Omega(Y)$ le cocycle associé à Y dans G,
- $G_Y = (Y, E_Y)$ le sous-graphe de G engendré par Y.

1. Montrer que :
$$\sum_{y \in Y} d(y) = 2|E_Y| + |\Omega(Y)|$$
2. En déduire
$$\sum_{y \in Y} d(y) - 2|E_Y| = |\Omega(Y)| = \sum_{y \in X \setminus Y} d(y) - 2|E_{X \setminus Y}|$$
3. On note d_i le degré du sommet x_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Montrer que :
$$\sum_{i=1}^{k} d_i - k(k-1) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} d_i \quad \text{pour tout } k \text{ dans } [\![1, n]\!]$$
4. Montrer que si G est un arbre alors on a :
$$d_i \geqslant 1 \text{ pour tout } i \text{ dans } [\![1, n]\!] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$$
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se donne une suite d'entiers strictement positifs $d = (d_1, \ldots, d_n)$ telle que :
$$d_i \geqslant 1 \text{ pour tout } i \text{ dans } [\![1, n]\!] \text{ et } \sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$$
Montrer par récurrence sur n qu'il existe un arbre à n sommets notés $x_1, \ldots, x_n$ et dont les degrés sont respectivement $d_1, \ldots, d_n$.

EXERCICE 2. – Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe et sans boucle (comme d'habitude, V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arcs de G). Soit $G' = (V, E')$ un graphe partiel de G c'est-à-dire tel que E' est une partie de E et soit $\overline{G'} = (V, E \setminus E')$ le graphe complément de G'.

1. Montrer que si $\overline{G'}$ possède deux composantes connexes alors G' contient un cocycle unique de G i.e. qu'il existe un unique $A \subseteq E'$ correspondant à un cocycle dans G d'une partie de V.
2. Montrer que $\overline{G'}$ est connexe si et seulement si G' ne contient pas de cocycle de G.
3. On appelle co-arbre de G tout graphe partiel $G' = (V, E')$ de G qui ne contient pas de cocycle et qui est maximal pour l'inclusion pour cette propriété (c'est-à-dire que tout graphe partiel de $G_1 = (V, E_1)$ tel que E_1 contient strictement E' contient un cocycle de G).
Montrer que G' est un co-arbre si et seulement si son complément $\overline{G'}$ est un arbre.

O. BEAUMONT, H. FOURNIER, I. GUERIN-LASSOUS et A. LEGRAND

Exercice 3. – On considère l'automate défini par la table de transition suivante :

	a	b
q_0	q_0	q_0, q_1
q_1	$-$	q_2
q_2	q_3	$-$
q_3	$-$	q_4

avec q_0 pour état initial et q_4 pour état d'acceptation.

Déterminiser cet automate et définir le langage qu'il reconnaît.

Exercice 4. –

1. On considère l'automate A_1 défini par la table de transition suivante :

	a	b	c
q_0	q_1	q_2	$-$
q_1	q_2	$-$	q_3
q_2	q_1	$-$	q_3
q_3	q_3	$-$	q_3

   avec q_0 pour état initial et $\mathcal{F}_1 = \{q_1, q_2, q_3\}$ pour ensemble d'états d'acceptation.

   Caractériser le langage L_1 reconnu par A_1 par une expression régulière et par une formule ensembliste.

2. On considère l'automate A_2 défini par la table de transition suivante :

	a	b	c
q'_0	q'_1	$-$	q'_2
q'_1	$-$	q'_3	q'_1
q'_2	$-$	q'_3	q'_1
q'_3	$-$	q'_1	$-$

   avec q'_0 pour état initial et $\mathcal{F}_2 = \{q'_1, q'_2\}$ pour ensemble d'états d'acceptation.

   Caractériser le langage L_2 reconnu par A_2 par une expression régulière et par une formule ensembliste.

3. Définir un automate reconnaissant le langage $L_1 \cap L_2$.