HX4 - Exercices : dénombrement

$\lfloor x \rfloor$ désigne la *partie entière* du réel x ; c'est donc un relatif, qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Manipulation des C_n^p

Q1 Quel est le plus grand terme dans le développement de $(3+5)^{40}$? Déterminer $\min\limits_{0 \leq k \leq n} k!(n-k)!$, puis $\max\limits_{0 \leq k \leq n} C_n^k$.

Q2 Simplifier : $\sum\limits_{0 \leq k \leq n} k.k!$ $\quad \sum\limits_{0 \leq k \leq n} k C_n^k$ $\quad \sum\limits_{0 \leq k \leq n} k^2 C_n^k$ $\quad \sum\limits_{0 \leq k \leq n} (-1)^k C_n^k$ $\quad \sum\limits_{0 \leq k \leq n} (-1)^k k C_n^k$ $\quad \sum\limits_{0 \leq k \leq n} \frac{C_n^k}{k+1}$ $\quad \sum\limits_{1 \leq p \leq n} \frac{p\, C_n^p}{C_n^{p-1}}$

$\sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2k}$ $\quad \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2k+1}$ $\quad \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} C_n^{3k}$ $\quad \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} C_n^{3k+1}$ $\quad \sum\limits_{k=0}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} C_n^{3k+2}$

Indications : utiliser $(1+x)^n$; on peut le dériver, l'intégrer, donner à x des valeurs complexes... On cherchera d'autres méthodes : récurrence ; « manipulation » des C_n^p exprimés avec des factorielles ; dénombrements d'objets bien choisis.

Q3 Établir : $0 < p \leq n \Rightarrow \sum\limits_{0 \leq k \leq p} (-1)^k C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 0$ $\quad 0 \leq p \leq n \Rightarrow \sum\limits_{0 \leq k \leq p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$ $\quad \sum\limits_{0 \leq k \leq n} \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n$

$0 \leq q \leq p \leq n \Rightarrow C_n^p = \sum\limits_{0 \leq k \leq q} C_q^k C_{n-q}^{p-k}$ $\quad 0 \leq p \leq n \Rightarrow \sum\limits_{p \leq k \leq n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

Q4 On a déclaré :

```
type Tableau=array[0..Nmax,0..Nmax] of integer;
var t:Tableau;
```

où `Nmax` est une constante entière. Écrire le reste d'un programme Pascal qui place dans `t[n,p]` le coefficient binomial C_n^p, pour $0 \leq$ `p` $\leq$ `n` $\leq$ `Nmax`. Sachant que l'accès (en lecture ou en écriture) à un élément d'un tableau à deux dimensions requiert une multiplication et une addition, quel est le coût de votre programme, en nombre d'opérations ? Le type de base de `Tableau` étant `integer`, quelle est la valeur maximale que l'on peut donner à `Nmax` avant que le programme ne devienne faux ?

Q5 Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation : $C_n^{p-1} + C_n^{p+1} = 2C_n^p$

Q6 On fixe un naturel p. Etablir $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} C_n^p = \frac{1}{p!}$. Interprétation en termes de probabilités ?

Quelques calculs

Q7 Donner une preuve de l'égalité $\sum\limits_{1 \leq k \leq n} k^3 = \Big(\sum\limits_{1 \leq k \leq n} k\Big)^2$ basée sur un examen attentif de la table de multiplication. En empilant des damiers de côté $1, 2, \ldots, n$, retrouver la formule donnant $\sum\limits_{1 \leq k \leq n} k^2$.

Q8 Calculer $\sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \max(i,j)$ $\quad \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i,j)$ $\quad \sum\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |i-j|$

Q9 Calculer $\sum\limits_{\substack{1 \leq i,j \leq n \\ i+j=n}} ij$ puis $\sum\limits_{\substack{1 \leq i,j,k \leq n \\ i+j+k=n}} ijk$.

Q10 Pour n et p naturels non nuls, on pose $B_n^p = \sum\limits_{1 \leq k \leq n} k^p$. B_n^1 est bien connu, et on a calculé plus haut B_n^2 et B_n^3. Plusieurs techniques pour déterminer B_n^4 sont exposées plus loin ; vous les appliquerez également au calcul de B_n^5, puis vous vérifierez les égalités :

$3B_n^5 = (B_n^1)^2(4B_n^1 - 1)$ $\quad 4(B_n^1 + B_n^3) = n(n+1)(n^2+n+2)$ $\quad 6(B_n^3 + B_n^5) = n^2(n+1)^2(n^2+n+1)$

(i) Faisant l'hypothèse qu'il existe des réels a, b, c, d, e, f tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $B_n^4 = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f$, écrire un système de six équations aux six inconnues a, b, c, d, e, f en prenant des valeurs simples de n, puis vérifier par récurrence sur n que les valeurs trouvées conviennent pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
(ii) Sommer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, le développement de $(k+1)^5$, éliminer les termes de degré 5, mettre en évidence B_n^4 et achever le calcul.

Dénombrements divers

Q11 Prouver que le nombre de personnes qui, au cours d'une soirée mondaine, ont serré un nombre IMPAIR de mains est nécessairement PAIR.

Q12 Combien existe-t-il de naturels dont l'écriture décimale n'utilise que des chiffres distincts ?

Q13 Compter les anagrammes des mots : $\boxed{\text{ALGORITHME}}$ $\boxed{\text{TANGENTE}}$ $\boxed{\text{RECURRENCE}}$.

Q14 On classe (selon l'ordre usuel) les naturels dont l'écriture décimale utilise quatre chiffres distincts pris dans $\{1, 2, 5, 7, 9\}$. Combien y-en-a-t-il ? Quel est le premier ? le 23-ième ? Quel est le rang de 1729 ? Quelle est leur somme ?

Q15 Dans un polygone à n sommets, combien y-a-t-il (au plus) de diagonales ? Combien celles-ci ont-elles (au plus) de points d'intersection autres que les sommets du polygone ?

Q16 On place n points deux à deux distincts sur une droite, et on construit les $\frac{n(n-1)}{2}$ cercles (de rayon non nul) ayant pour diamètre le segment défini par deux de ces points. Combien ces cercles ont-ils de points d'intersection autres que les n point considérés ?

Q17 Combien existe-t-il de couples (F, G) de parties de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $F \subset G$? Combien existe-t-il de $p-$uplets $(F_k)_{1 \leq k \leq p}$ de parties de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $F_k \subset F_{k+1}$ pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$?

Q18 Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

Q19 Etablir, pour $0 \leq p < n$: $C_n^p = \sum\limits_{1 \leq k \leq p+1} C_{n-k}^{p+1-k}$. Pour n et p fixés, combien l'équation $\sum\limits_{1 \leq k \leq n} x_k = p$ possède-t-elle de solutions dans $\mathbb{N}^n$? Même question, pour l'inéquation $\sum\limits_{1 \leq k \leq n} x_k \leq p$.

Q20 Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, compter le nombre de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $|x| + |y| = n$; puis le nombre de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $|x| + |y| + |z| = n$.

Q21 On fixe n et p dans $\mathbb{N}^*$; combien l'équation $\sup\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k| = p$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{Z}^n$?

Q22 E est un ensemble de dix naturels deux à deux distincts, compris entre 1 et 100. Montrer qu'il existe deux parties distinctes A et B de E telles que : $\sum\limits_{a \in A} a = \sum\limits_{b \in B} b$.

Q23 Soit E un ensemble fini non vide, de cardinal n. Calculer :

$$S_1 = \sum_{X \in \wp(E)} (-1)^{\mathrm{Card}(X)} \qquad S_2 = \sum_{X \in \wp(E)} \mathrm{Card}(X) \qquad S_3 = \sum_{(X,Y) \in \wp(E)^2} \mathrm{Card}(X \cap Y)$$

Q24 Soit E un ensemble de cardinal n, et $(\alpha_k)_{1 \leq k \leq r}$ des naturels non nuls tels que $\sum\limits_{1 \leq k \leq r} \alpha_k = n$. Combien existe-t-il de partitions de E en r sous-ensembles $(A_k)_{1 \leq k \leq r}$ tels que $\forall k \in [\![1, r]\!]$: $\mathrm{Card}(A_k) = \alpha_k$?

Q25 Dans un échiquier, compter les carrés à côtés parallèles au quadrillage, et dont les sommets sont des centres de cases ; calculer la valeur moyenne de l'aire de ces carrés. Pour qui l'ignorerait : il y a 64 cases sur un échiquier, disposées en 8 rangées de 8... Reprendre l'exercice, en supprimant la condition de parallélisme.

Q26 De combien de façons peut-on choisir, dans une rangée de douze maisons, quatre maisons deux à deux non contiguës ? Généralisation ; de combien de façons peut-on choisir, dans une rangée de n maisons, p maisons deux à deux non contiguës ?

Q27 Écrire un programme qui détermine tous les naturels a compris entre 100 et 999 inclus, tels que, si $6a = 3b = 2c$, les écritures décimales réunies de a, b et c utilisent une fois et une seule chacun des chiffres 1 à 9.

Q28 On veut peindre les n étages d'un immeuble, certains en rouge, d'autres en bleu, mais en s'interdisant de peindre en rouge deux étages consécutifs. De combien de façons peut-on procéder ?

Q29 Les *Pensées* de Pascal sont numérotées de 1 à 924, et écrites sur les pages 73 à 326 incluses d'un livre. Montrer qu'au moins 671 d'entre elles sont écrites sur une seule page, dont une ayant même numéro que la page sur laquelle elle est écrite.

Composé avec TEX le 14 Août 1994