RICM4 Probabilités et Simulation – Devoir n°1

Arnaud Legrand, Jonatha Anselmi

25 octobre 2019

Informations générales

Conseils et consignes importantes

- Avant de vous lancer dans la programmation, essayez de répondre aux différentes questions, l'une après l'autre (c'est important), en n'utilisant que votre intuition. Vous rédigerez votre opinion en début de question avant de détailler vos réponses finales. Le fait que cette intuition soit correcte ou pas n'aura aucune impact sur votre note finale. Décrire votre intuition a uniquement pour but que vous commenciez à réfléchir au problème et de réaliser à quel point votre intuition peut être correcte ou pas. Vous analyserez, cette intuition au vu des résultats et des statistiques observés.

- Vous prendrez soin de vous interroger sur la variabilité de vos estimations et de justifier pourquoi/comment vous avez adapté les différents paramètres de vos simulations.

- Nous vous déconseillons fortement de chercher des solutions qui ressembleraient sur Internet ou dans des livres. Ce qu'on trouve sur Internet sur ces sujets est souvent bourré de fautes et les livres qui traitent formellement de ces sujets sont souvent bien au delà de notre programme. N'hésitez cependant pas à nous demander si vous avez un doute sur la signification de l'énoncé ou sur une question.

- Vous pouvez discuter du sujet entre vous mais le codage et la rédaction des analyses doivent être individuels. Vous indiquerez clairement avec qui vous avez discuté et vous citerez toute source d'information utilisée pour répondre aux questions.

- Pas la peine de chercher des choses compliquées. Pour la majorité des questions des différents exercices, le code à écrire n'excède pas quelques lignes.

- Votre devoir sera rédigé sous forme d'un document HTML généré à l'aide de `R/Markdown` et publié sur `rpubs` en prenant soin de bien laisser le code apparent et de fixer la graine de votre générateur à l'aide de la fonction `set.seed` au tout début du document afin qu'il soit possible de reproduire vos données avec exactitude. Vous enverrez l'url `rpubs` de votre devoir par mail à `arnaud.legrand@imag.fr` et à `jonatha.anselmi@inria.fr` en indiquant dans le sujet `[RICM4-PS] DM` avant le 6 décembre à minuit.

Exercice 1 : Question préliminaire à propos d'estimation

On s'intéresse au jeu suivant entre Alice et Bob :

- Alice **choisit** (secrètement) un nombre a (strictement positif mais quelconque).

- Elle tire ensuite $n \geqslant 2$ nombres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendemment et uniformément dans l'intervalle $[0, a]$. n est un nombre fixe et décidé par Alice et Bob avant de jouer (par exemple $n = 10\ldots$).

- Bob doit essayer de "deviner" le nombre a à partir des X_i.

Vous écrirez un code `R` pour étudier les situations suivantes.

▶ **Q1.1.** $M = \max_i X_i$ **est un estimateur de** a**. Étudier pour différentes valeurs de** a **et de** n **de votre choix l'espérance de** M**.**

- Que remarquez-vous ?
- Trouver (empiriquement) une formule (en fonction de a et de n) pour $\mathbb{E}[M]$ et déduisez-en comment "corriger" M pour que son espérance soit égale à a
- Estimez (empiriquement) la variance de M en fonction de n et de a.

▶ **Q1.2. Étudier pour différentes valeurs de** a **et de** n **de votre choix l'espérance de** $M' = \frac{2}{n}\sum_i X_i$**.**

- Que remarquez-vous ? Savez-vous le démontrer ?
- Estimez (empiriquement) la variance de M' en fonction de n et de a (vous pouvez également démontrer votre formule). Cet estimateur M' vous semble-t-il meilleur ou moins bon que M ?

Exercice 2 : Un deuxième jeu à base de max

Dans le jeu précédent, aucun gain ou perte n'est associé à la proposition de Bob. On s'intéresse donc cette fois-ci à une version un peu plus élaborée :

- Alice **tire** (secrètement) un nombre A uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Elle tire ensuite (toujours secrètement) $n \geqslant 2$ nombres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendemment et uniformément dans l'intervalle $[0, A]$. n est un nombre fixe et décidé par Alice et Bob avant de jouer (par exemple $n = 10\ldots$).
- Elle annonce à Bob la plus grande valeur obtenue $M = \max_i X_i$. Cette valeur M est donc toujours inférieure à A.
- Bob doit alors deviner la valeur de A à partir de la valeur M révélée par Alice. Pour cela, il propose une réponse $r(M)$ aussi proche que possible de A.
  - Si $r(M)$ est strictement supérieur à A, Bob a perdu et Alice le lui prouve en révélant A.
  - Si $r(M)$ est plus petit que A, Bob gagne la différence entre M et $r(M)$ (i.e., Alice doit donner $G = r(M) - M$ euros à Bob).

L'objectif de cet exercice est d'étudier ce jeu (stratégie gagnante, espérance de gain, etc.).

▶ **Q2.3. Bob n'a pas encore trop pu réfléchir à la bonne stratégie et il se propose donc d'essayer la stratégie** $r(M) = 1.1M$ **lorsque** $n = 10$**.**

- Est-ce une bonne stratégie selon vous (si oui pourquoi ? si non pourquoi ?).
- Écrire un code `R` simulant cette situation et permettant d'estimer l'espérance du gain G de Bob.

▶ **Q2.4. Simplifions un peu et supposons que** $n = 3$**, que** A **est tiré uniformément dans l'ensemble discret** $\{0, 0.1, \ldots, 1.0\}$ **et que les** X_i **sont également des multiples de** 0.1 **tirés uniformément dans l'ensemble discret** $\{0, \ldots, M\}$**.**

- Écrire un code `R` permettant d'estimer $\mathbb{P}[A = a, M = m]$ pour les différentes valeurs de a et de m.
- En déduire une estimation de $\mathbb{P}[A = a | M = 0.5]$. Si Alice vous indique que $M = 0.5$, quelle valeur de A devriez-vous lui proposer ?
- Vous pourrez essayer d'autres valeur de a pour développer et vérifier votre intuition.

► **Q2.5. On retourne au cas général (continu uniforme). Bob se propose d'essayer la stratégie $r(M) = M^\alpha$ avec $\alpha < 1$.**

- Est-ce une bonne stratégie selon vous (si oui pourquoi ? si non pourquoi ?).
- Écrire un code `R` simulant cette situation et permettant d'estimer l'espérance du gain G de Bob pour $n = 2$ et $\alpha \in \{0.7, 0.5, 0.3\}$. Quelle est la meilleure valeur de α parmis ces trois valeurs ? Arrivez-vous à trouver un meilleur α en dehors de ces valeurs ?
- Mêmes questions quand $n = 10$.

Exercice 3 : Question BONUS : un dernier jeu à base de max et de pile ou face

On s'intéresse cette fois-ci au jeu suivant entre Alice et Bob :

- Alice **choisit** (secrètement) deux nombres quelconques $A_1 < A_2$ dans l'intervalle $[0, 1]$. Bob va devoir deviner A_2.
- Puisqu'Alice choisit ses nombres, pour que le jeu soit un peu plus "équitable", elle **tire** ensuite (toujours secrètement) à Pile ou Face avec une pièce non biaisée. Si c'est Pile, elle donne à Bob la plus grande des deux valeurs (A_2) et si c'est Face, la plus petite (A_1).
- Bob doit deviner si Alice lui a indiqué la plus grande des deux valeurs ou pas.

► **Q3.6. Bob se dit qu'il n'a rien à perdre à toujours répondre "oui". Quelle est sa probabilité de gagner ?**

► **Q3.7. Élaborez une autre stratégie permettant à Bob de tomber juste strictement plus d'une fois sur deux.**
Si vous avez trouvé :

- Évaluez le gain de cette stratégie lorsque Alice **choisit** $A_1 = 0.4$ et $A_2 = 0.6$.
- Évaluez le gain de cette stratégie lorsque Alice **tire** ses deux nombres uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.