UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Salle d'examens :

N° Place :

Numéro de la carte d'étudiant : 1 0 1 6 3 7 5 4

Nom et prénoms : Raphaël AUDIN

Signature :

Session d'examen :

Date :

Diplôme :

Epreuve :

Appréciation :

Note sur 20 :

« Il est rappelé que l'étudiant pris en flagrant délit de fraude en examen est passible de la Section disciplinaire qui peut prononcer les sanctions suivantes : Blâme - Exclusion de l'Université - Exclusion de tous les établissements d'enseignement supérieur public. »

Assez Bien. B

Regarde ce que j'ai écrit et revient vers moi si besoin. Essaie aussi de faire les autres exercices si tu peux.

Sujet choisi :

Exercice 3 - Modélisation par chaîne de Markov

3.1) On se place à temps discret $n \in \mathbb{N}$ où n modélise la semaine considérée. On note X_n le "nombre de demande de travaux". Le nombre importe peu. Il faut distinguer A et B.

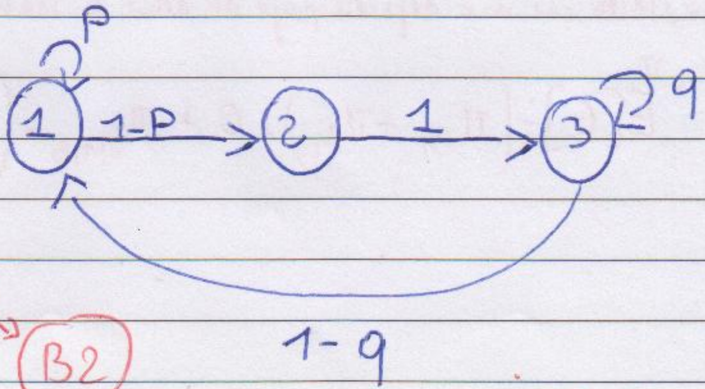
X_n est 1 chaine de Markov homogène car d'après l'énoncé, le nombre de demande de travaux ne dépend pas de l'historique.

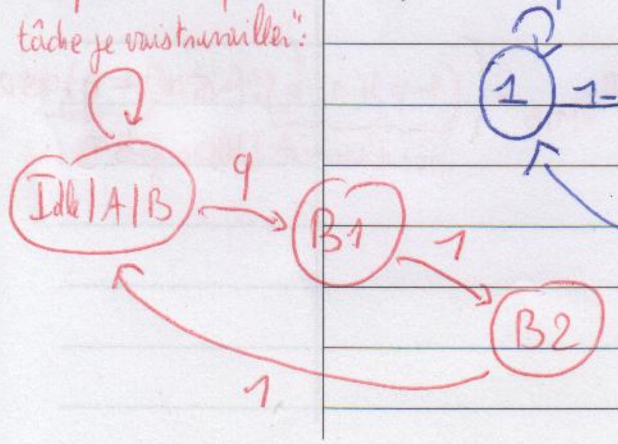
Son espace d'état est $E = \{1, 2, 3\}$ représentant les semaines.

Ça ne veut pas dire grand chose. Il te faut quelque chose d'observable. Par exemple : "sur quelle tâche je vais travailler" :

On notera Π_n le vecteur des probabilités transitoires : $\Pi_n(i) = P[X_n = i]$

3.2)





C'est le graphe avec l'état "en début" de semaine.

Regarde aussi en page 4.

[redacted]

La matrice de transition associée est :

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Je ne suis pas sûr de la justesse du graphe de transition mais ~~la Σ des~~ chaque lignes de la matrice vaut 1. Effectivement. tout à fait raison d

3.3) $\pi(1) = 0{,}6\,\pi(1) + 0{,}4\,\pi(2)$
$\pi(2) = \pi(3)$
$\pi(3) = \pi(1) \cdot 0{,}3 + 0{,}7\,\pi(3)$

⚠ tu as écrit dans le mauvais s
Regarde ton graphe. On a π_1
π_2
π_3

$\pi(1) - 0{,}6\,\pi(1) = 0{,}4\,\pi(2)$
$0{,}4\,\pi(1) = 0{,}4\,\pi(2) \iff \pi 1 = \frac{\cancel{0{,}4}}{\cancel{0{,}4}}\pi(2)$

on remarque que $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3)$
Soit $\pi_1 = 0{,}33$ $\pi_2 = 0{,}33$ $\pi_3 = 0{,}33$

Ces calculs sont cohérents.

3.4) X suit 1 loi géométrique de paramètre p.
Par théorème, son $\mathbb{E}$ est $1/p$ soit 1,67

Ouh là. Non. Avec la chaine précédente, tu sais la probabilité d'être en I|A|B, B_1, ou B_2. En B_1 et B_2, on ne gagne rien car on a déjà été payé au début du travail. Donc

$$E[G] = (\pi_{B_1} + \pi_{B_2}) \times 0 + \pi_{I|A|B} \times \Big(\underbrace{(1-p)(1-q)\times(-2500)}_{\text{pas d'arrivée - Idle}} + \underbrace{q \times 1500}_{\text{job B}}$$

Tu as
e vérifier ça.

ens.

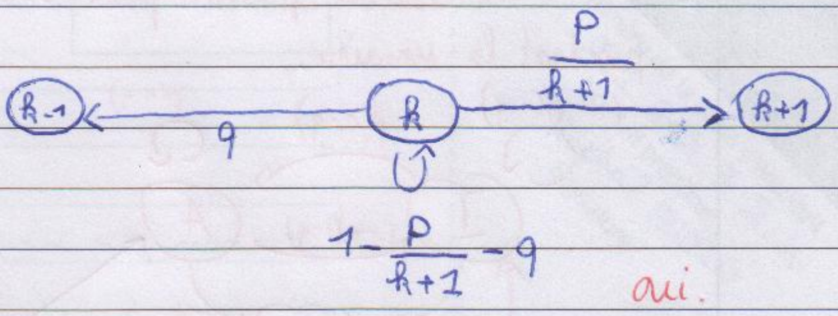
$= p\pi_1 + (1-q)\pi_3$

$= (1-p)\pi_1$

$= q\pi_3 + \pi_2.$

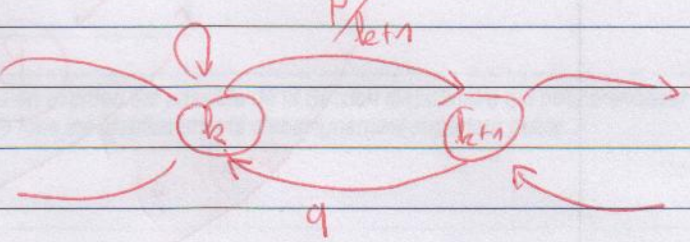
Exercice 2

2.2)



oui.

$\pi(0) = k-1$
$\pi(1) = k$
$\pi(2) = k+1$



2.3) $\pi(0) = q \times \pi(1)$

$\pi(1) = \cancel{\pi(1)k}\ 1 - \frac{p}{k+1} - q$

$\pi(2) = \pi(1) \cdot \frac{p}{k+1}$

Si on se place entre k et $k+1$, on passe aussi souvent de k à $k+1$ que de $k+1$ à k quand on est stationnaire

Donc $\pi_k \times \frac{p}{k+1} = \pi_{k+1} \times q$

soit $\pi_{k+1} = \frac{p}{q} \times \frac{1}{k+1} \pi_k$

$= \left(\frac{p}{q}\right)^{k+1} \times \frac{1}{(k+1)!} \pi_0$

Il s'agirait d'une loi de Poisson.

oui

Là on reconnaît une loi de Poisson... et parce que $\sum \pi_k = 1$ il faudra que $\pi_0 = e^{-\frac{p}{q}}$

$0 + \underbrace{p(1-q)}_{\text{pas de B mais un A}} \times 4\,000)$

- Autre modélisation possible pour 3.1. Sur quoi on travaille pendant la semaine.