Houda ELAJI
INFO 4

B

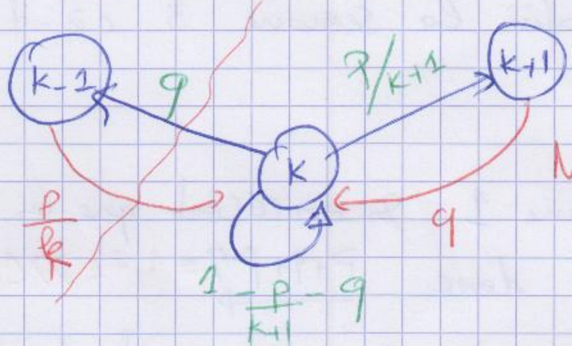
Evaluation de Performances

Il y a du travail mais une confusion importante sur ce que représente $\pi_n(k)$ et ce qu'on peut écrire dans l'état stationnaire.

Exercice 2

2_2 Calcul du régime stationnaire d'un processus de naissance et de mort particulier

Q.2.2 Le graphe de transition associé à la chaine



Non, la loi de proba totale te donne plutôt :
$\pi_n(k) = \frac{p}{k}\pi_{n-1}(k-1) + q\pi_{n-1}(k+1)$
$+(1-\dots)\pi_{n-1}(k)$

Q2.3 On calcul la probabilité asymptotique de chacun des états.

$$\pi_n(k-1) = P(X_n = k-1 \ \& \ X_{n-1} = k) = \pi_{n-1}(k) \cdot P(X_n = k-1 \mid X_{n-1} = k)$$
$$= \pi_0(k) \cdot q^n$$

⚠ Je ne cherche pas π_n mais π_∞, le régime stationnaire.

En utilisant la loi de probabilité totale $\pi_{n+1} = \pi_n P$ on remarque que $\pi_1(k-1) = \pi_0(k) \cdot q$ et par récurrence on démontre $\pi_n(k-1) = \pi_0(k) \cdot q^n$

$$\pi_n(k) = P(X_n = k \ \& \ X_{n-1} = k) = \pi_{n-1}(k) \cdot P(X_n = k \mid X_{n-1} = k)$$
$$= \pi_0(k) \cdot \left(1 - \frac{p}{k+1} - q\right)^n$$

on utilisons la propriété $\pi_{n+1} = \pi_n \cdot P$ et par récurrence on aura $\pi_{n+1} = \pi_0 P^n$ dans ce cas puisque on accède à k par k.

$$\pi_n(k+1) = P(X_n = k+1 \ \& \ X_{n-1} = k) = \pi_{n-1}(k) \cdot P(X_n = k+1 \mid X_{n-1} = k)$$
$$= \pi_0(k) \cdot \left(\frac{p}{k+1}\right)^n$$

de même on utilise $\pi_{n+1} = \pi_n P$ alors que $\pi_1(k+1) = \pi_0(k) \cdot \frac{p}{k+1}$
on a par récurrence $\pi_n(k+1) = \pi_0(k) \cdot \left(\frac{p}{k+1}\right)^n$

Si on note π_k la proba d'être dans l'état k en régime stationnaire, on a :
$q\pi_k = \frac{p}{k}\pi_{k-1}$. Donc $\pi_k = \frac{p}{q} \times \frac{1}{k}\pi_{k-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^k \times \frac{1}{k!}\pi_0$. On retrouve une loi de Poisson

Exercice 3

1 _ Modélisations par une chaîne de Markov $\{X_n\}$

On prend X_n = nombre de semaine sur lesquelles on fait l'activités

$X_n \in \{0, 1, 2, 3\}$ = espace d'état

$p+q = 1,3\ldots$

Donc proba négative...

Q3,2 — qu'on est à la semaine 0 on est inactif, on y reste si on reçoit rien donc $1-(p+q)$

– on passe à la semaine 0 si on avait reçu que les catégorie A avant ou si on a fini la semaine 3 c.à-d on a fini les installations des catégorie B.

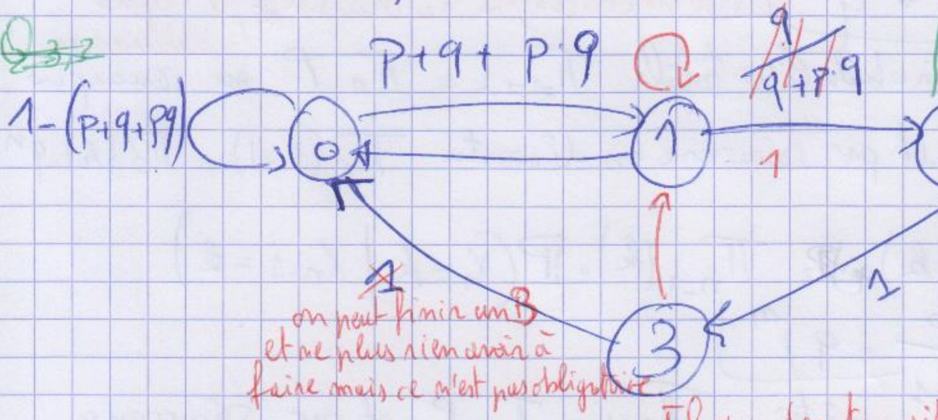
– On passe à la semaine 1 si on reçoit que les catégorie A ou que B ou les deux donc $\underrightarrow{p+q+p\cdot q} = 1,72 >> 1\ldots$

– on ~~repasse~~ passe à la semaine 2 si on avait déjà reçu des B avant et qu'il nous reste à installer les machines

– la même par rapport à semaine 3.

• $q/(q+pq)$ c'est la proba d'avoir des machines B à finir l'installation parmi celles qu'on a eu auparavant

• 1 car c'est évident de passer à la semaine qui suit puisqu'on est en catégorie B.



Il y a des transitions bizarres et qui manquent. Je les ai rajoutées en rouge.

Q3,3 Probabilités d'états

$\pi_n(0) = \pi_{n-1}(0) \cdot P(X_n=0 \mid X_{n-1}=0) + \pi_{n-1}(1) \cdot P(X_n=0 \mid X_{n-1}=1) + \pi_{n-1}(3) P(X_n=0 \mid X_{n-1}=3)$

$= (1-p+q+pq)^n \cdot \pi_0 (\ldots$

$\pi_n(1) = \pi_{n-1}(0) \cdot P(X_n = 1 \mid X_{n-1}=0) +$

$\pi_n(1) = (p+q+p\cdot q)^n \cdot \pi_0(0)$

$\pi_n(2) = \left(\dfrac{q}{q+pq}\right)^n \cdot \pi_0(1)$

$\pi_n(3) = \pi_0(2)$

Attention, encore une fois il y a des confusions avec les n et $n-1$ que tu balades partout.

On a $\pi(3)=\pi(2)$ mais certainement pas $\pi_n(3)=\pi_0(2)$!