A

Bien. Quelques petites erreurs mais tu as compris comment ça marche. Regarde ce que j'ai écrit et reviens vers moi si besoin.

LOMBARD
Myriam RICM4

Evaluation de Performance
Quick

Exercice n° 2 : Autour de la loi de Poisson

2.1 Loi de l'inverse

← ici N est un nombre, ça n'est pas cohérent...

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{(N+1)}\right] = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\left(\frac{1}{N+1}\right)} \times \mathbb{P}[N=k]$$

pourquoi ce 1 ?

ici, N est une v.a.

$$= \sum_{k=0}^{N} (N+1) \times \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= (N+1)\, e^{-\lambda} \times \sum_{k=0}^{N} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= (N+1)\, \underbrace{e^{-\lambda} \times e^{\lambda}}_{e^0 = 1}$$

$$= (N+1)$$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{N+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \mathbb{P}[N=k]$$

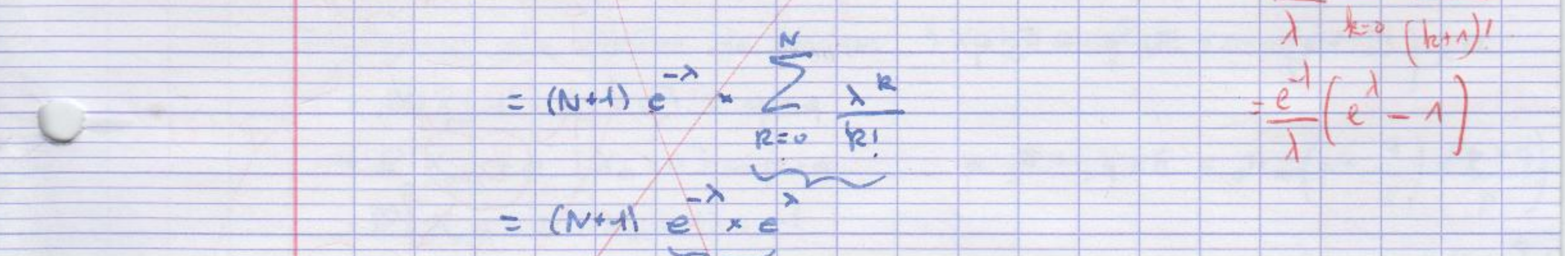
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(e^{\lambda} - 1\right)$$

2.2 Calcul du régime stationnaire d'un processus de naissance et de mort particulier

2.2



Oui.

mais ici, la somme en sortie est $1-p-q+p < 1$

Cette chaîne est mal définie en 0. Mea Culpa!

2.3

$$\pi_0 = \pi_0 (1-p-q) + \pi_1 \times q$$

$$\pi_0 (p+q) = \pi_1 \times q$$

$$\pi_0 = \frac{q}{p+q} \pi_1 \iff \pi_1 = \frac{p+q}{q} \pi_0$$

$$\pi_1 = \pi_0 p + \pi_1 \left(1 - \frac{p}{2} - q\right) + \pi_2 q$$

$$\pi_1 \left(1 - 1 + \frac{p}{2} + q\right) = \pi_0 p + \pi_2 q$$

$$\pi_1 \left(\frac{p}{2} + q\right) = \pi_0 p + \pi_2 q$$

$$\left(\frac{p+q}{q}\right)\left(\frac{p}{2} + q\right) \times \pi_0 = \pi_0 p + \pi_2 q$$

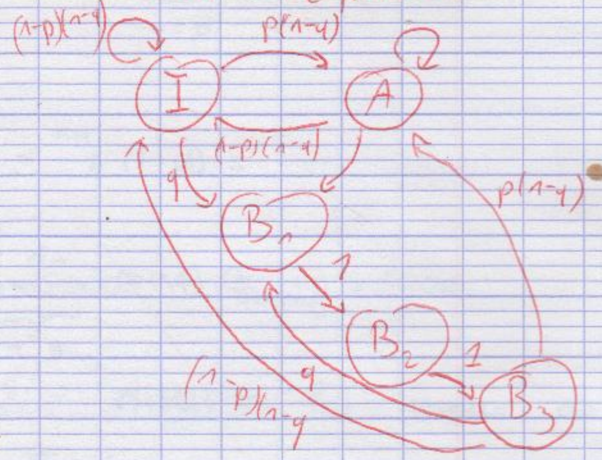
$$\left(\frac{\frac{p}{q}+1}{1}\right)\left(\frac{p}{2q} + 1\right) \times \pi_0 = \pi_0 p + \pi_2 q$$

$$\left[\frac{p^2}{2q^2} + \frac{p}{2q} + \frac{p}{q} + 1\right] \pi_0 = \pi_2 q + \pi_0 p$$

$$\left[\frac{p^2}{2q^2} + \frac{p}{2q} + \frac{p}{q} - p\right] \pi_0 = \pi_2 q$$

$$\left[\frac{p^2}{2q^3} + \frac{p}{2q^2} + \frac{p}{q^2} - \frac{p}{q}\right] \pi_0 = \pi_2$$

Une autre possibilité



En posant $\alpha = \frac{p}{q}$, on obtient :

$$\pi_1 = (\alpha + 1) \pi_0$$

$$\pi_2 = \left(\frac{\alpha^2}{2q} + \frac{\alpha}{2q^2} + \frac{\alpha}{q} - \alpha\right) \pi_0$$

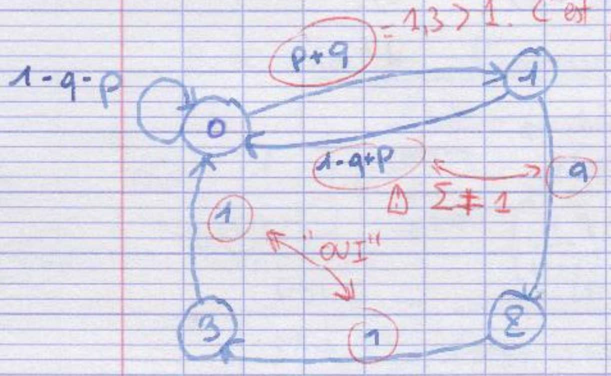
À l'exception des facteurs en bas, cela aurait ressemblé à une loi exponentielle ($e^x = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6} \dots$)

OUI. Tout à fait ! enfin... On

Exercice n°3 : Modélisation par Chaîne de Markov

3.1 Modèle sans attente

3.1 Chaque état représente une semaine.



La chaîne est fausse car tu ne t'es pas posé la question de ce que représente X_i.

• Une possibilité : X est ce sur quoi tu "travailles" en début de semaine :

Reste à calculer les autres probas comme il faut

En fait on peut enchaîner B et A donc ③ → ① manque

Définissons cette chaîne de Markov $\{X_n\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$:

- $\mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0] = q + q$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0] = 1 - p - q$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1] = 1$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = 3 \mid X_n = 2] = 1$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = 1 \mid X_n = 3] = 1$
- $\mathbb{P}[X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1] = 1 - q + p$

$q(\cancel{1-q})$

3.3 $\pi_0 = \pi_0(1-q-p) + \pi_1(1-q+p) + \pi_3$ /

$\pi_1 = \pi_0(p+q)$ /

$\pi_2 = \pi_1 q = \pi_0 q(p+q)$ /

$\pi_3 = \pi_2 = \pi_0 q(q+p)$

Or, $\sum_{i=0}^{3} \pi_i = 1 \iff \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ /

...a une somme qui est celle de la série exponentielle $\left(e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)$ mais ce n'est pas une loi exponentielle (qui est une loi continue) : c'est une loi de Poisson.

$\Leftrightarrow \pi_0 \left(1 + p + q + 2q(p+q)\right) = 1$

$\Leftrightarrow \pi_0 \left(1 + p + q + 2qp + 2q^2\right) = 1$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + p + q(1 + 2p + 2q)} \simeq \frac{1}{2{,}482} \simeq \text{environ } 0{,}4$$

$$\pi_1 = \frac{p+q}{1 + p + q(1+2p+2q)} = \frac{0{,}13}{2{,}482}$$

$$\pi_2 = \pi_3 = \frac{q\,(p+q)}{1 + p + q(1+2p+2q)} = \frac{0{,}101}{2{,}482}$$

3.4 Rentabilité

$$\mathbb{E}[G] = P_A \times 4000 + q \times 15\,000 - P_{\text{Inactif}} \times 2500$$

P_A = Probabilité d'effectuer les travaux de catégorie A

$$\mathbb{E}[G] = \left(1 - q - \frac{1}{20}\right) \times 4000 + q \times 15\,000 - \frac{1}{20} \times 2500$$

$(1-p)(1-q) \times \pi_{I|A|B}$

$$= 1000 + 0{,}7 \times 15\,000 - \frac{2500}{20}\ €$$

1) Normalement, le $\frac{1}{20}$ n'est pas une donnée...

2) C'est plutôt $\cancel{(1-p)(1-q) \times \pi}$

$\cancel{(1-\pi_{Idle})}$ $p(1-q) \times \pi_{I|A|B}$

$$\mathbb{E}[G] = \left(\pi_{B_1} + \pi_{B_2}\right) \times 0 + \pi_{I|A|B} \times \left(\underbrace{(1-p)(1-q) \times (-2500)}_{\text{Idle...}} + \underbrace{q \times 15000}_{B} + \underbrace{(1-q)p \times 4000}_{A} \right)$$