La théorie des jeux pour les partages de ressources dans les grands systèmes distribués

Corinne Touati,
INRIA Grenoble Rhône-Alpes

Conférence ski-études ENS

corinne.touati@inria.fr

January, 2009

Outline

Outline

La théorie des jeux : qu'est ce que c'est ?

La théorie des jeux : qu'est ce que c'est ?

Quel est le point commun entre

- les échecs
- le tarot
- Pierre - feuille - ciseaux
- le backgammon
- le football
- [...]

La théorie des jeux : qu'est ce que c'est ?

Quel est le point commun entre

- les échecs
- le tarot
- Pierre - feuille - ciseaux
- le backgammon
- le football
- [...]

$\Rightarrow$ situations de décisions interactives dans lesquelles l'utilité (bien-être) de chaque individu dépend des décisions des autres.

Théorie des jeux : théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants

La théorie des jeux : qu'est ce que c'est ?

Quel est le point commun entre

- les échecs
- le tarot
- Pierre - feuille - ciseaux
- le backgammon
- le football
- [...]

Quelques mots techniques :

- information complète
- information incomplète
- jeu simultané
- jeu stochastique
- jeu avec coalitions
- [...]

$\Rightarrow$ situations de décisions interactives dans lesquelles l'utilité (bien-être) de chaque individu dépend des décisions des autres.

Théorie des jeux : théorie de la décision (rationnelle) d'agents stratégiquement interdépendants

Éléments constitutifs d'un jeu

Un ensemble d'acteurs $\Rightarrow$ joueurs
Un ensemble de choix possibles $\Rightarrow$ stratégies
Des fonctions associées aux actions $\Rightarrow$ fonctions de coût ou utilité
Des règles du jeu
Les informations disponibles à chacun

La théorie des jeux : exemples

Économie :

- Tarification : Un ensemble de firmes fixent leurs prix de sorte à maximiser leurs revenus, les clients choisissent leurs produits de sorte à maximiser leur rapport qualité-prix (oligopole)
- Enchères : le prix de vente dépend des actions des enchérisseurs

Politique :

- Lutte contre le terrorisme
- Négociations

Biologie :

- Tumeurs cancéreuses : les cellules saines et malignes sont en compétitions pour l'accès aux nutriments
- Génétique : influence de l'environnement sur les évolutions des individus

et pleins d'autres...

La théorie des jeux et les systèmes (informatiques) distribués

- Rien à voir avec les jeux vidéos

La théorie des jeux et les systèmes (informatiques) distribués

- Rien à voir avec les jeux vidéos
- Les protagonistes ne sont pas des humains : téléphones, ordinateurs...

La théorie des jeux et les systèmes (informatiques) distribués

- Rien à voir avec les jeux vidéos
- Les protagonistes ne sont pas des humains : téléphones, ordinateurs...

Popularité croissante dans les grands systèmes distribués depuis les années 90 du fait de :

- L'augmentation du nombre des protagonistes
- L'accroissement et la complexification des systèmes
- La dynamicité

La théorie des jeux et les systèmes (informatiques) distribués

- Rien à voir avec les jeux vidéos
- Les protagonistes ne sont pas des humains : téléphones, ordinateurs...

Popularité croissante dans les grands systèmes distribués depuis les années 90 du fait de :

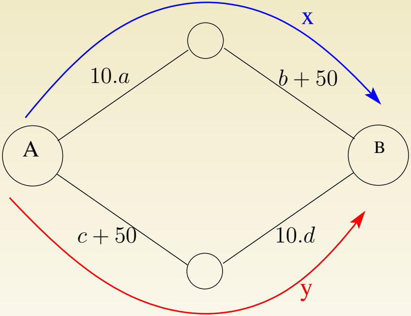
- L'augmentation du nombre des protagonistes
- L'accroissement et la complexification des systèmes
- La dynamicité

$\Rightarrow$ on a besoin de méthodes automatisées pour concevoir, gérer les systèmes et évaluer les performances

Outline

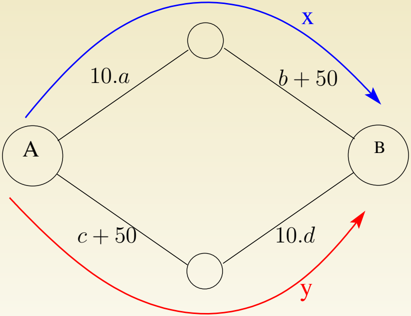
Un premier exemple : la circulation routière

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



- 2 chemins possibles
- le temps mis est fonction du flot de voitures sur le chemin en question (bouchons)

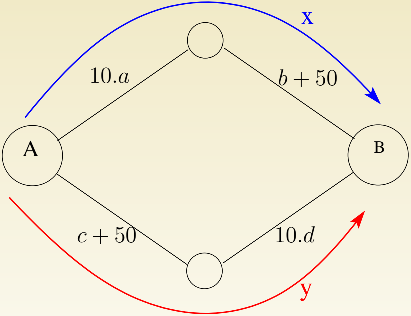
Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

Un premier exemple : la circulation routière

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?

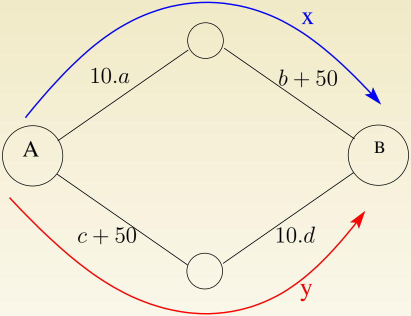


Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

Un premier exemple : la circulation routière

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



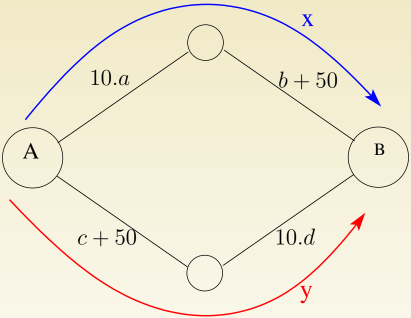
Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

Coût du chemin "nord" :

Un premier exemple : la circulation routière

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

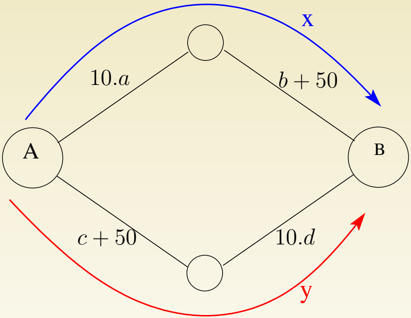
Celui de coût minimal

Coût du chemin "nord" :

$10 * x + (x + 50) = 11 * x + 50$

Un premier exemple : la circulation routière

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

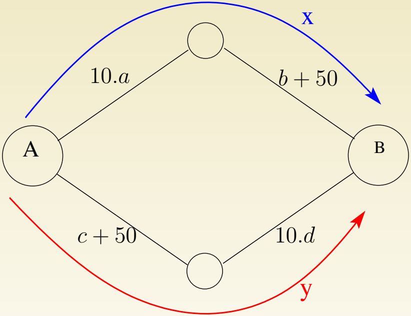
Coût du chemin "nord" :

$10 * x + (x + 50) = 11 * x + 50$

Coût du chemin "sud" :

Un premier exemple : la circulation routière

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

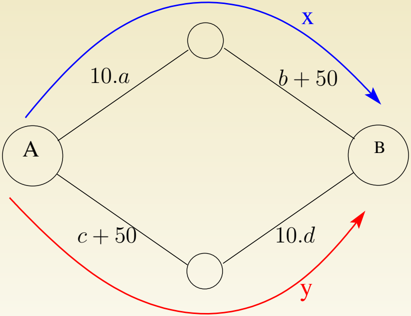
Coût du chemin "nord" :

$10 * x + (x + 50) = 11 * x + 50$

Coût du chemin "sud" :

$(y + 50) + 10 * y = 11 * y + 50$

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

Coût du chemin "nord" :

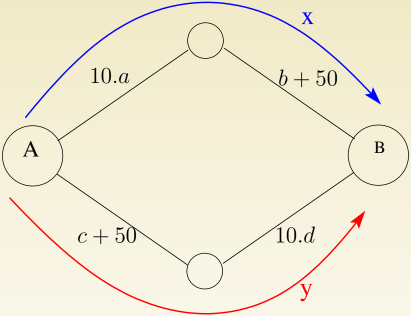
$10 * x + (x + 50) = 11 * x + 50$

Coût du chemin "sud" :

$(y + 50) + 10 * y = 11 * y + 50$

Contrainte : $x + y = 6$

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

Coût du chemin "nord" :

$10 * x + (x + 50) = 11 * x + 50$

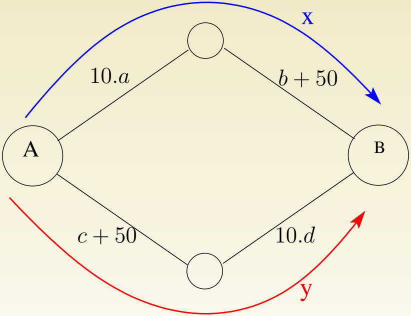
Coût du chemin "sud" :

$(y + 50) + 10 * y = 11 * y + 50$

Contrainte : $x + y = 6$

Bilan ? Quid si tout le monde raisonne comme moi ?

Question : Un flot d'utilisateurs part de A au débit de 6 pers / sec. Chacun à 2 chemins possibles pour aller à B. Qui part où ?



Quel chemin allez vous prendre ?

Celui de coût minimal

Coût du chemin "nord" :

$10 * x + (x + 50) = 11 * x + 50$

Coût du chemin "sud" :

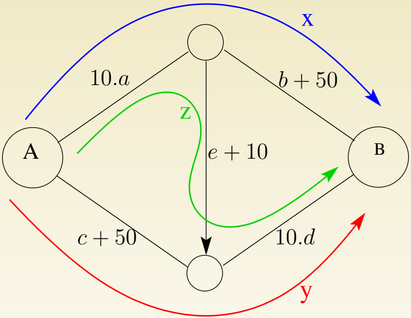
$(y + 50) + 10 * y = 11 * y + 50$

Contrainte : $x + y = 6$

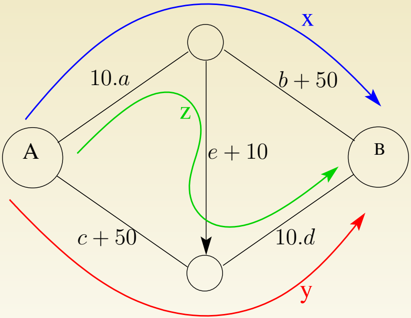
Bilan ? Quid si tout le monde raisonne comme moi ?

On a $x = y = 3$ et chacun a un coût de 83

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?

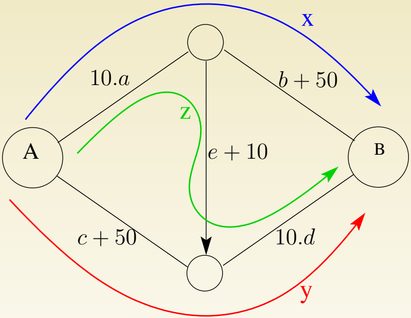


Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



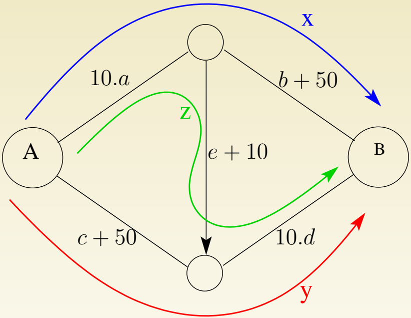
Si 1 personne la prend son coût est de

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

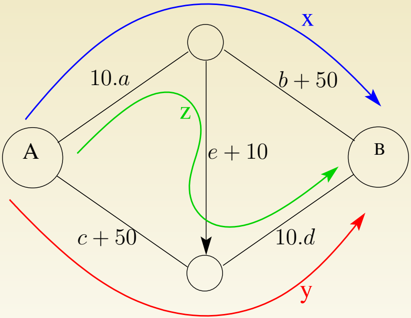
Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

Coût du chemin "nord" :

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?

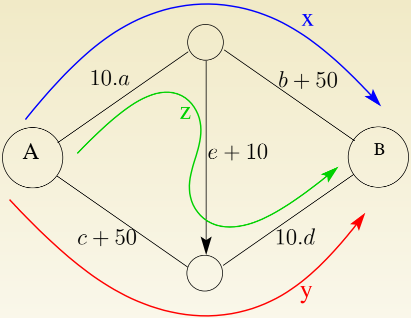


Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

Coût du chemin "nord" :

$10 * (x + z) + (x + 50) =$
$11 * x + 50 + 10 * z$

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



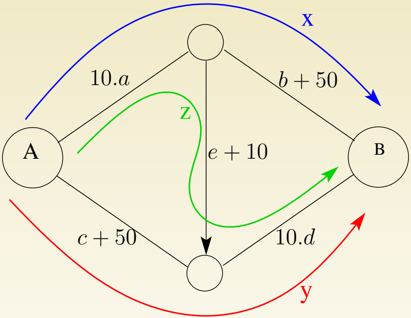
Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

Coût du chemin "nord" :

$10 * (x + z) + (x + 50) =$
$11 * x + 50 + 10 * z$

Coût du chemin "sud" :

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

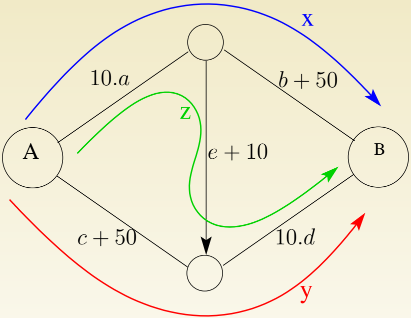
Coût du chemin "nord" :

$10*(x+z)+(x+50) =$
$11*x+50+10*z$

Coût du chemin "sud" :

$11*y+50+10*z$

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

Coût du chemin "nord" :

$10 * (x + z) + (x + 50) =$

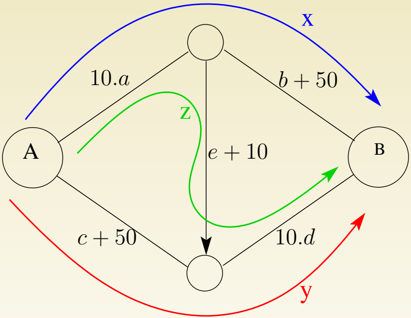
$11 * x + 50 + 10 * z$

Coût du chemin "sud" :

$11 * y + 50 + 10 * z$

Coût du "nouveau" chemin :

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

Coût du chemin "nord" :

$10*(x+z)+(x+50) =$

$11*x+50+10*z$

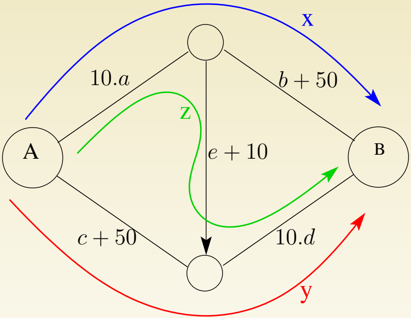
Coût du chemin "sud" :

$11*y+50+10*z$

Coût du "nouveau" chemin :

$10*x+10*y+21*z+10$

Une nouvelle route vient d'être ouverte ! Que se passe t'il ?



Si 1 personne la prend son coût est de 70 ! donc elle va être suivie... ☺

Coût du chemin "nord" :

$10*(x+z)+(x+50) =$

$11*x+50+10*z$

Coût du chemin "sud" :

$11*y+50+10*z$

Coût du "nouveau" chemin :

$10*x+10*y+21*z+10$

Bilan ?

On a $x=y=z=2$ et chacun a un coût de 92 !

Un premier exemple : la circulation routière

Dans le New York Times, 25 Dec., 1990, Page 38, What if They Closed 42d Street and Nobody Noticed ?, By GINA KOLATA :

ON Earth Day this year, New York City's Transportation Commissioner decided to close 42d Street, which as every New Yorker knows is always congested. "Many predicted it would be doomsday," said the Commissioner, Lucius J. Riccio. "You didn't need to be a rocket scientist or have a sophisticated computer queuing model to see that this could have been a major problem." But to everyone's surprise, Earth Day generated no historic traffic jam. Traffic flow actually improved when 42d Street was closed.

Un premier exemple : la circulation routière

Conclusion :

- Quand les optimisations individuelles sont non-concertées, les équilibres obtenus peuvent être inefficaces
- Dans les situations non-concertées, l'augmentation de ressources peut nuire à tous les utilisateurs du système

Conclusion :

- Quand les optimisations individuelles sont non-concertées, les équilibres obtenus peuvent être inefficaces
- Dans les situations non-concertées, l'augmentation de ressources peut nuire à tous les utilisateurs du système

Vocabulaire :
Les jeux dans lesquels il y a tant de protagonistes que chacun a un impact négligeable est appelé : jeux de populations
Les équilibres que nous venons de voir sont appelés : équilibres de Wardrop
La dégradation de performances est appelée : paradoxe de Braess

Considérons $F(x, y, z) =$

$$\int_0^{x+z} (10u)du + \int_0^{x} (u+50)du + \int_0^{y} (u+50)du + \int_0^{y+z} (10u)du + \int_0^{z} (u+10)du$$

Alors : $x_{\text{eq}} = \text{argmin} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)$, idem pour y_{eq} et z_{eq}

Un premier exemple : la circulation routière

Considérons $F(x,y,z) =$

$$\int_0^{x+z}(10u)du+\int_0^{x}(u+50)du+\int_0^{y}(u+50)du+\int_0^{y+z}(10u)du+\int_0^{z}(u+10)du$$

Alors : $x_{\text{eq}} = \text{argmin}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$, idem pour y_{eq} et z_{eq}

$\Rightarrow$ F est appelée fonction potentiel et l'équilibre obtenu minimise la fonction F.

Considérons $F(x,y,z) =$

$$\int_0^{x+z}(10u)du+\int_0^{x}(u+50)du+\int_0^{y}(u+50)du+\int_0^{y+z}(10u)du+\int_0^{z}(u+10)du$$

Alors : $x_{\text{eq}} = \text{argmin}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$, idem pour y_{eq} et z_{eq}

$\Rightarrow$ F est appelée fonction potentiel et l'équilibre obtenu minimise la fonction F.

Conséquence 1 : caractérisation des équilibres sous forme d'un problème d'optimisation.

Un premier exemple : la circulation routière

Considérons $F(x,y,z) =$

$$\int_0^{x+z}(10u)du + \int_0^{x}(u+50)du + \int_0^{y}(u+50)du + \int_0^{y+z}(10u)du + \int_0^{z}(u+10)du$$

Alors : $x_{\text{eq}} = \text{argmin}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$, idem pour y_{eq} et z_{eq}

$\Rightarrow F$ est appelée fonction potentiel et l'équilibre obtenu minimise la fonction F.

Conséquence 1 : caractérisation des équilibres sous forme d'un problème d'optimisation.

Conséquence 2 : interprétation de l'équilibre : c'est le point qui minimise la somme des coûts des liens (pas des chemins)

Un premier exemple : la circulation routière

Considérons $F(x,y,z) =$

$$\int_0^{x+z}(10u)du+\int_0^{x}(u+50)du+\int_0^{y}(u+50)du+\int_0^{y+z}(10u)du+\int_0^{z}(u+10)du$$

Alors : $x_{\text{eq}} = \text{argmin}\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)$, idem pour y_{eq} et z_{eq}

$\Rightarrow$ F est appelée fonction potentiel et l'équilibre obtenu minimise la fonction F.

Conséquence 1 : caractérisation des équilibres sous forme d'un problème d'optimisation.

Conséquence 2 : interprétation de l'équilibre : c'est le point qui minimise la somme des coûts des liens (pas des chemins)

Conséquence 3 : inversement, on peut choisir F puis en déduire les optimisations individuelles correspondantes

$\Rightarrow$ modification d'un problème global en unités distribuées

Outline

Axes de recherches en théorie des jeux en informatique :

Jeux coopératifs	Jeux Non-cooperatifs
Vision globale consensus efficace et équitable	Comportement individuel converge (ou non) vers un équilibre

Mécanismes :

recherche de règles du jeu pour obtenir des comportements satisfaisants.

Exemple : Intersection routière :

- Approche coopérative : quel serait le résultat de la négociation préalable entre les utilisateurs ?
- Approche mécanisme : mise en place des panneaux de signalisations (feux, stops...) contrôlés par la police
- Approche non-cooperative : chacun pour soi, essayant de passer au plus vite l'intersection

Exemple de collaboration imposée (ensemble de lois contrôlées par la police)

Axes de recherche

Alors que l'approche purement non-coopérative donnerait :

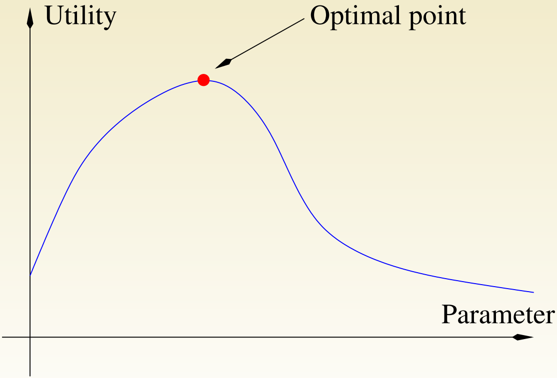
Outline

1. Introduction
   - La théorie des jeux : qu'est ce c'est ? à quoi ça sert ?
   - Un premier exemple de jeu et son étude
   - Bilan : Les différents axes de recherche
2. Jeux Non-cooperatifs
   - Définition de l'optimalité
   - Équilibres de Nash & Wardrop
   - Paradoxes de Braess
   - D'autres modèles de jeux et d'équilibres
3. Jeux coopératifs
   - Définitions de l'équité
   - Exemples
4. Conclusion
   - Zoom sur...
   - D'autres axes de recherche en théorie des jeux
   - Liens

Outline

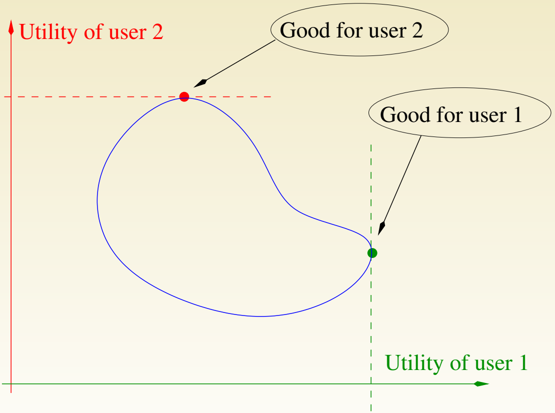
Optimalité dans les systèmes multi-utilisateurs

- Optimalité pour un utilisateur seul



Optimalité dans les systèmes multi-utilisateurs

- Situation avec des utilisateurs multiples

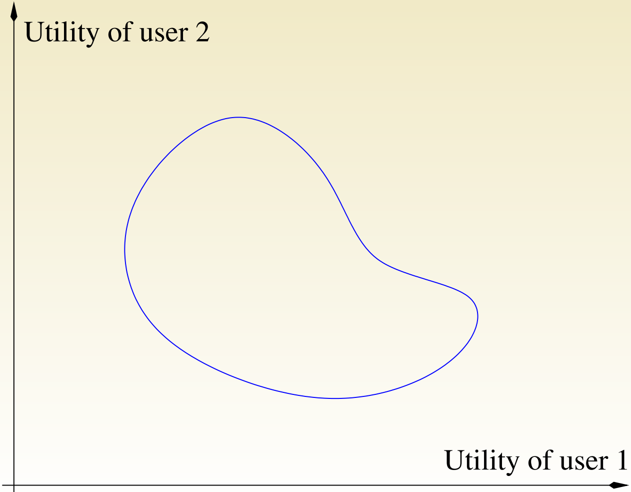


Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.

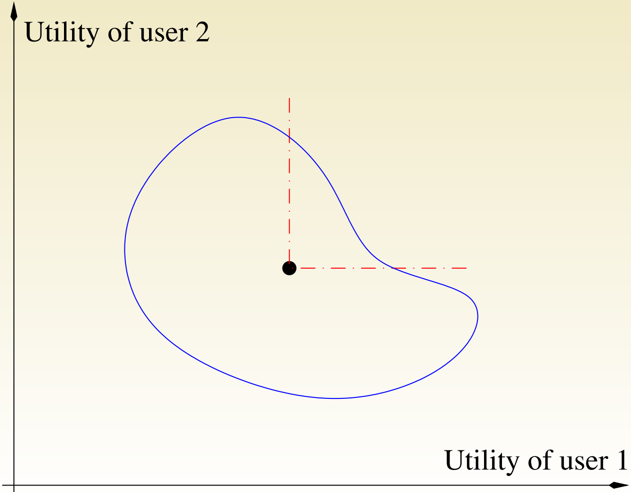
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



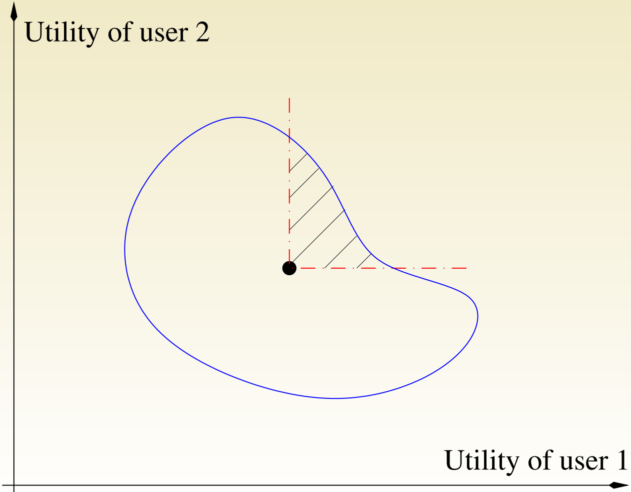
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



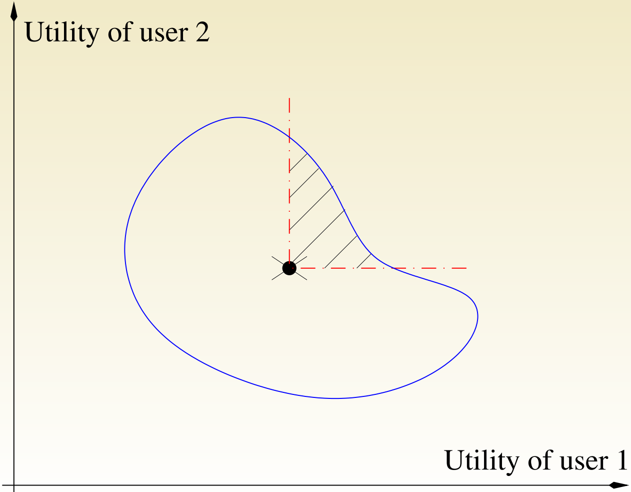
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



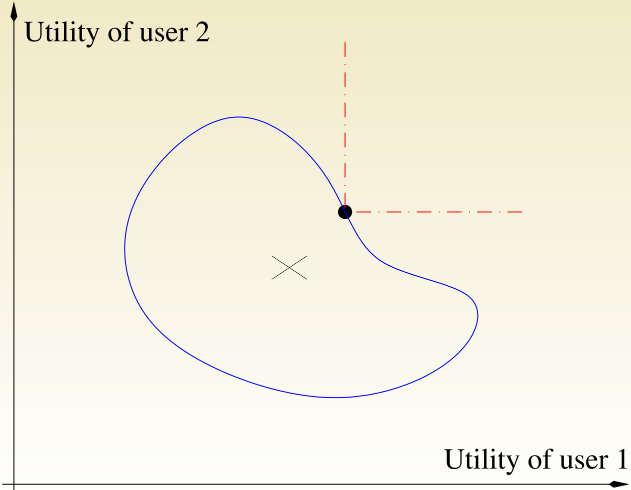
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



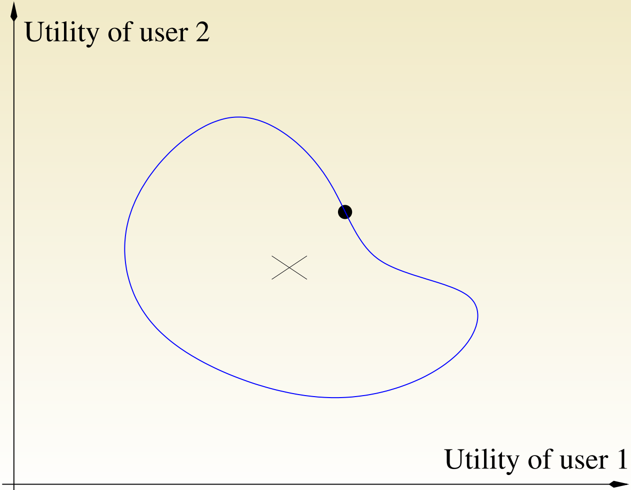
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



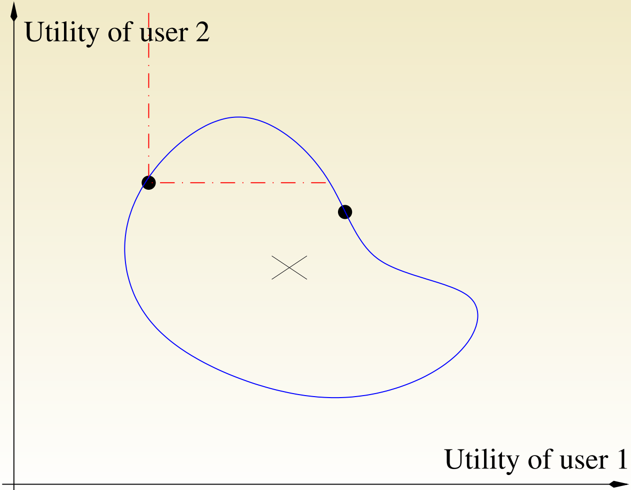
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



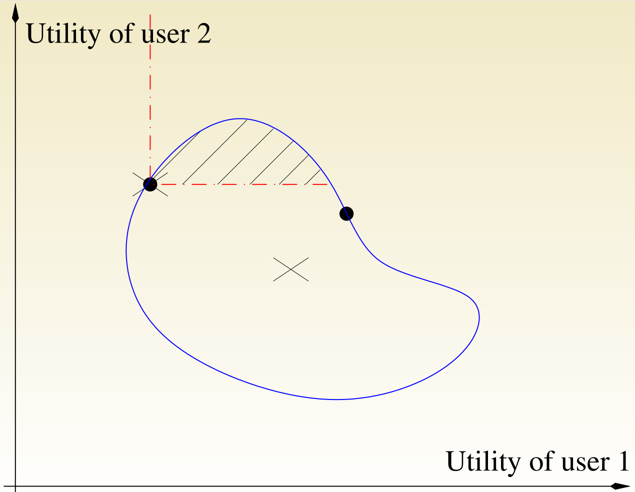
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



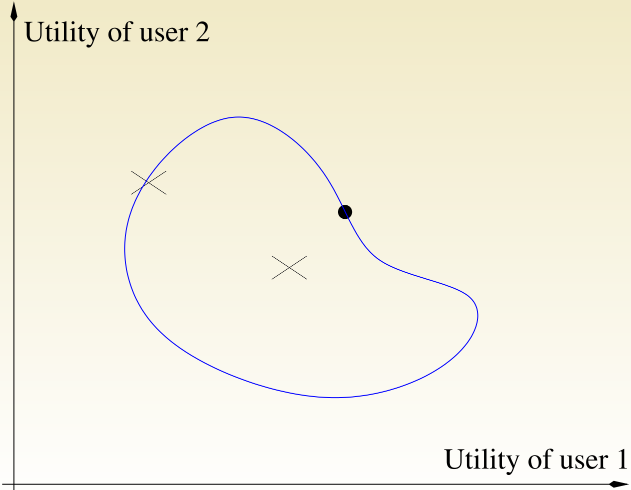
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



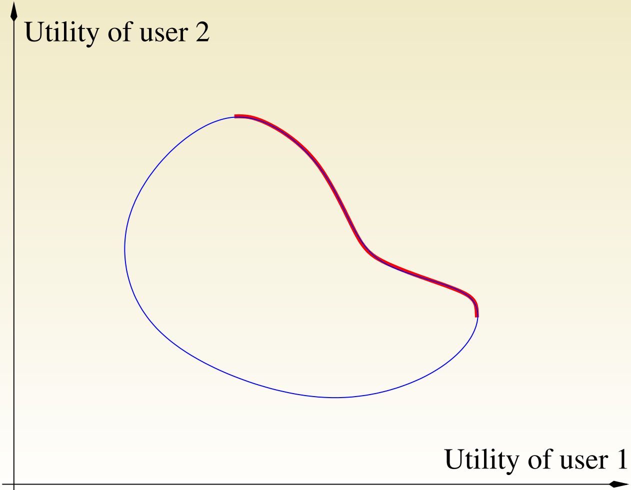
Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



Définition: Optimalité de Pareto.

Un point est dit Pareto optimal si il ne peut pas être strictement dominé par un autre.



Outline

Équilibres de Nash : définition

Définition: Jeux non-coopératifs.

Dans les jeux non-coopératifs, chaque joueur prend ses décisions de sorte à (ne) maximiser (que) sa propre utilité.

Définition.

Équilibres de Nash Dans un equilibre de Nash, aucun joueur n'a intérêt à changer unilatéralement sa stratégie.

strategie (choix)

utility

s^* est un équilibre de Nash ssi :

$$\forall p, \forall s_p, u_p(s_1^*, \ldots, s_p^*, \ldots s_n^*) \geqslant u_p(s_1^*, \ldots, s_p, \ldots, s_n^*)$$

En version théorie des jeux :

$$\forall p, \forall s_p, u_p(s_{-p}^*, s_p^*) \geqslant u_p(s_{-p}^*, s_p)$$

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1,1)$	$(3,0)$
nier	$(0,3)$	$(2,2)$

Équilibres de Nash : exemples

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1,1)$	$(3,0)$
nier	$(0,3)$	$(2,2)$

$\Rightarrow$ pas efficace

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2,1)$	$(0,0)$
Foot	$(0,0)$	$(1,2)$

Équilibres de Nash : exemples

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1,1)$	$(3,0)$
nier	$(0,3)$	$(2,2)$

$\Rightarrow$ pas efficace

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2,1)$	$(0,0)$
Foot	$(0,0)$	$(1,2)$

$\Rightarrow$ pas unique

Feuille-Pierre-Ciseau

Équilibres de Nash : exemples

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1,1)$	$(3,0)$
nier	$(0,3)$	$(2,2)$

$\Rightarrow$ pas efficace

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2,1)$	$(0,0)$
Foot	$(0,0)$	$(1,2)$

$\Rightarrow$ pas unique

Feuille-Pierre-Ciseau

$1/2$	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Équilibres de Nash : exemples

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1, 1)$	$(3, 0)$
nier	$(0, 3)$	$(2, 2)$

$\Rightarrow$ pas efficace

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2, 1)$	$(0, 0)$
Foot	$(0, 0)$	$(1, 2)$

$\Rightarrow$ pas unique

Feuille-Pierre-Ciseau

$1/2$	F	P	C
F	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
P	$(-1, 1)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$
C	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(0, 0)$

$\Rightarrow$ pas d'équilibre

Équilibres de Nash mixtes

Définition: Equilibres de Nash mixtes.

Une stratégie mixte pour le joueur i est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégies pures du joueur i.

Un équilibre de Nash mixte est un profil σ^* de stratégies mixtes tel que : $\forall p, \forall \sigma_i, u_p(\sigma^*_{-p}, \sigma^*_p) \geqslant u_p(\sigma^*_{-p}, \sigma_p)$

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1,1)$	$(3,0)$
nier	$(0,3)$	$(2,2)$

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2,1)$	$(0,0)$
Foot	$(0,0)$	$(1,2)$

Feuille-Pierre-Ciseau

$1/2$	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

Équilibres de Nash mixtes : exemples

Trouvez les équilibres de Nash de ces jeux

Le dilemme du Prisonnier

	collaborer	nier
collaborer	$(1,1)$	$(3,0)$
nier	$(0,3)$	$(2,2)$

Pas d'équilibre mixte

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2,1)$	$(0,0)$
Foot	$(0,0)$	$(1,2)$

$\sigma_1 = (2/3, 1/3)$, $\sigma_2 = (1/3, 2/3)$

Feuille-Pierre-Ciseau

$1/2$	F	P	C
F	$(0,0)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$
P	$(-1,1)$	$(0,0)$	$(1,-1)$
C	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,0)$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = (1/3, 1/3, 1/3)$$

Équilibres de Nash Bayésiens (un exemple)

Supposons que le monde puisse être dans 2 états w_1 et w_2, avec probabilité $P(w_1) = P(w_2)$.

(w_1)	a	b
a	$(0,0)$	$(6,-3)$
b	$(-3,6)$	$(5,5)$

(w_2)	a	b
a	$(-20,-20)$	$(-7,-16)$
b	$(-16,-7)$	$(-5,-5)$

Quel est l'équilibre de Nash pur si

- aucun des joueurs ne connaît l'état :
- les deux joueurs sont informés :
- Seul le joueur 1 est au courant :

Supposons que le monde puisse être dans 2 états w_1 et w_2, avec probabilité $P(w_1) = P(w_2)$.

(w_1)	a	b
a	$(0,0)$	$(6,-3)$
b	$(-3,6)$	$(5,5)$

(w_2)	a	b
a	$(-20,-20)$	$(-7,-16)$
b	$(-16,-7)$	$(-5,-5)$

Quel est l'équilibre de Nash pur si

- aucun des joueurs ne connaît l'état :
  EN : (b,b), utilité :$(0,0)$
- les deux joueurs sont informés :
  EN : $((a,a)|w1), ((b,b)|w2)$, utilité : $(-2.5,-2.5)$
- Seul le joueur 1 est au courant :
  EN : $((a,a)|w1)$, $((b,a)|w2)$, utilité $(-8,-3,5)$

L'information peut être néfaste !

Équilibres de Nash

Avantages

- Intuitif

Inconvénients

Équilibres de Nash

Avantages

- Intuitif
- Facile à implémenter

Inconvénients

Équilibres de Nash

Avantages

- Intuitif
- Facile à implémenter

Inconvénients

- Pas de garantie de l'existence / l'unicité

Équilibres de Nash

Avantages

- Intuitif
- Facile à implémenter

Inconvénients

- Pas de garantie de l'existence / l'unicité
- difficile à calculer analytiquement (points fixes)

Équilibres de Nash

Avantages

- Intuitif
- Facile à implémenter

Inconvénients

- Pas de garantie de l'existence / l'unicité
- difficile à calculer analytiquement (points fixes)
- en général pas Pareto optimal

Équilibres de Nash : Applications

Des contextes variés :

- Systèmes d'équilibrages de charge
  Les utilisateurs décident vers quel serveur envoyer leurs requêtes de sorte à minimiser leur délai moyen.

Équilibres de Nash : Applications

Des contextes variés :

- Systèmes d'équilibrages de charge
  Les utilisateurs décident vers quel serveur envoyer leurs requêtes de sorte à minimiser leur délai moyen.
- Systèmes sans-fils
  Les utilisateurs choisissent la puissance d'émission à utiliser afin de maximiser un compromis entre débit de transfert et utilisation de la batterie.

Équilibres de Nash : Applications

Des contextes variés :

- Systèmes d'équilibrages de charge
  Les utilisateurs décident vers quel serveur envoyer leurs requêtes de sorte à minimiser leur délai moyen.
- Systèmes sans-fils
  Les utilisateurs choisissent la puissance d'émission à utiliser afin de maximiser un compromis entre débit de transfert et utilisation de la batterie.
- Tarification
  Les fournisseurs de service choisissent leurs prix de sorte à optimiser leur revenu, qui dépend du prix demandé, du coût de l'infrastructure et de leur part de marché.

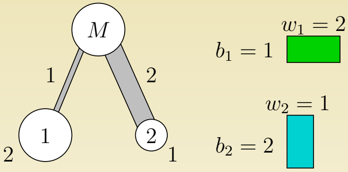
Équilibres de Nash : Applications

Des contextes variés :

- Systèmes d'équilibrages de charge
  Les utilisateurs décident vers quel serveur envoyer leurs requêtes de sorte à minimiser leur délai moyen.
- Systèmes sans-fils
  Les utilisateurs choisissent la puissance d'émission à utiliser afin de maximiser un compromis entre débit de transfert et utilisation de la batterie.
- Tarification
  Les fournisseurs de service choisissent leurs prix de sorte à optimiser leur revenu, qui dépend du prix demandé, du coût de l'infrastructure et de leur part de marché.
- Files d'attente
  Les utilisateurs optimisent leur "puissance", le rapport de leur débit et du débit moyen.

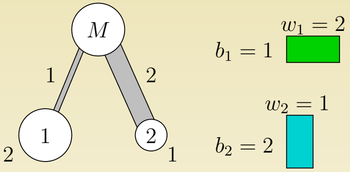
Équilibres de Nash : Application à l'ordonnancement dans les applications de type "sacs de tâches"

2 machines / 2 applications



Équilibres de Nash : Application à l'ordonnancement dans les applications de type "sacs de tâches"

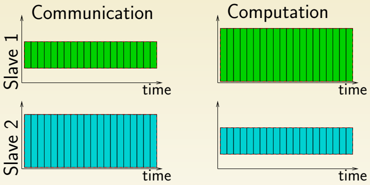
2 machines / 2 applications



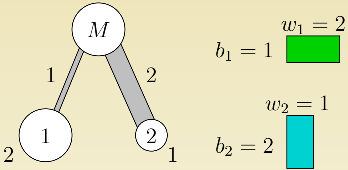
Approche coopérative :

L'application i est exécutée exclusivement sur le processeur i.

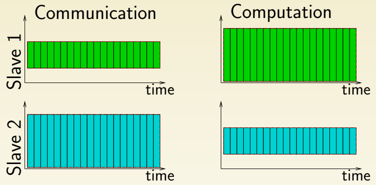
$\alpha_1^{\text{(coop)}} = \alpha_2^{\text{(coop)}} = 1.$



Équilibres de Nash : Application à l'ordonnancement dans les applications de type "sacs de tâches"



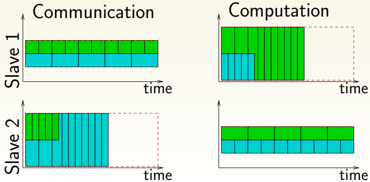
2 machines / 2 applications



Approche coopérative :

L'application i est exécutée exclusivement sur le processeur i.

$\alpha_1^{\text{(coop)}} = \alpha_2^{\text{(coop)}} = 1.$



Approche non-coopérative :

$$\alpha_1^{(nc)} = \alpha_2^{(nc)} = \frac{3}{4}$$

Jeux de population

Définition: Jeux de population.

- Q populations, chacune de masse $\hat{d}_q$.
- Un ensemble fini de stratégies pour chaque population.
- Une distribution de stratégies $y = (y_1, ..., y_Q)$, avec y_q le vecteur des masses des sous-ensembles de population q adoptant la même stratégie.
- Un revenu marginal par unité de masse i de pop. q : $F_q^i(y)$.

Définition: Equilibre de Wardrop.

Un point $\hat{y}$ est un équilibre de Wardrop si, pour toute population :

- Toutes les stratégies utilisées par les membres de la population ont le même rev. marg. : $\forall i, j, y_q^i \neq 0, y_q^j \neq 0,\ F_q^i(\hat{y}) = F_q^j(\hat{y})$.
- Le revenu marginal associé à chaque stratégie utilisée par les individus est supérieur à celui de n'importe qu'elle stratégie non choisie.

Outline

Paradoxes de Braess : definition

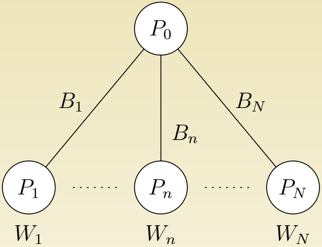
Les équilibres Pareto (Wardrop)-inefficaces peuvent avoir des comportements inattendus

Définition: Paradoxe de Braess.

On dit qu'il y a paradoxe de Braess si il existe deux systèmes ini et aug tels que :

$$ini < aug \text{ et } \alpha^{(nc)}(ini) > \alpha^{(nc)}(aug).$$

i.e. l'ajout des ressources au système peut diminuer les performances de **tous** les joueurs simultanément.



Hypothèse : le maître ne peut envoyer des paquets qu'à 1 seul esclave à la fois.

Exemple

maître :	$W = 2.55$
3 machines :	$(B_i, W_i) = (4.12, 0.41), (4.61, \mathbf{1.31}), (3.23, 4.76)$
2 applications :	$b^1 = 1,\ w^1 = 2,\ b^2 = 2,\ w^2 = 1$

Équilibre (ini) :	$a^1 = 0.173,\ a^2 = 0.0365$
Équilibre ($W_2 = \mathbf{5.4}$) :	$a^1 = 0.127,\ a^2 = 0.0168$

Outline

Nous n'avons fait qu'effleurer la surface...

Il existe bien d'autres modèles de jeux :

- Jeux répétés : on rejoue plusieurs fois le même jeu (ex. le tarot en 100 points). Le but est d'alors maximiser le revenu moyen.
- Jeux dynamiques : les joueurs jouent à tour de rôle. L'ensemble des stratégies dépend alors des étapes précédentes du jeu.
- Jeux évolutionnaires : inspiré des approches Darwinistes. Se compose d'un jeu interne (entre les individus) et d'un jeu externe (le processus évolutionnaire).
- Jeux stochastiques : jeu dynamique (=évoluant dans le temps) dans lequel les transitions sont probabilistes : le nouvel état est déterminé par une distribution de probabilité dépendant de l'état courant et des actions choisies (Markov Decision Process).
- Équilibres de Stackelberg : jeu entre deux joueurs aux rôles asymétriques : un meneur et un suiveur (utilisé par exemple dans les mécanismes de tarification des e-services). Autres modèles liés : compétition de Bertrand, compétition de Cournot.

Comment améliorer les performances des équilibres non-coopératifs ?

Pas de solution universelle, dépend du type de jeu, mais plusieurs possibilités :

Équilibres corrélés :

- Un corrélateur donne des conseils à chaque joueur
- (tels que) la stratégie optimale de chaque joueur est de suivre le conseil.
- Équilibres de Nash $\subset$ Équilibres corrélés

Des études ont montrés que dans certains cas, le corrélateur n'a pas besoin d'une quelconque information sur le système.

Mécanismes de tarification :

- Une entité donne de l'argent (bonus) aux joueurs
- Chaque joueur agit de sorte à optimiser son propre revenu

Problème très étudié dans les protocoles réseaux de type TCP (basés sur l'optimisation Lagrangienne)

Équilibres corrélés : Un exemple

Bataille des sexes

Paul / Claire	Opéra	Foot
Opéra	$(2,1)$	$(0,0)$
Foot	$(0,0)$	$(1,2)$

Équilibre de Nash mixte : $\sigma_1 = (2/3, 1/3)$, $\sigma_2 = (1/3, 2/3) \Rightarrow$ utilité : $(2/3, 2/3)$

Supposons qu'on lance une pièce équilibrée.
$\Rightarrow$ nouvel équilibre, e.g. (OO) si pile, (FF) si face

L'utilité est alors de $(1.5, 1.5)$, ce qui est impossible à un équilibre de Nash du jeu original.

Outline

Définition axiomatique VS problème d'optimisation

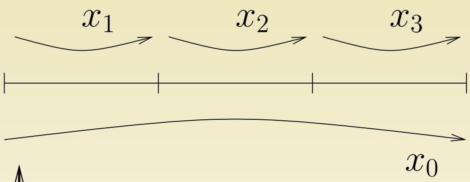
1. optimalité de Pareto
2. Symétrie
3. Invariance à des transformations linéaires

$+$

- Indépendant à des alternatives inacceptables Nash (NBS) / équité proportionelle $\prod u_i$
- Monotonie Raiffa-Kalai-Smorodinsky / max-min
  Récursivement $\max\{u_i | \forall j, u_i \leqslant u_j\}$
- Monotonie inverse
  Thomson / bien commun (Social welfare)
  $\max \sum u_i$

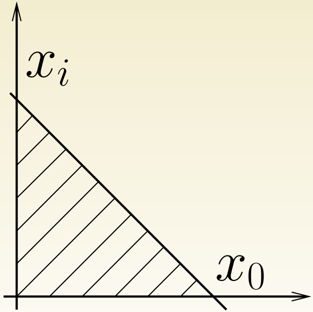
Équité : à quoi cela revient-il ?

4 connexions / 3 liens.



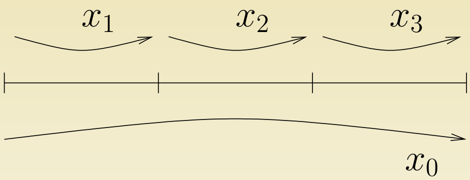
$$\begin{cases} x_1 + x_0 \leqslant 1, \\ x_2 + x_0 \leqslant 1, \\ x_3 + x_0 \leqslant 1. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 4 inconnues et 3 (in)égalités.

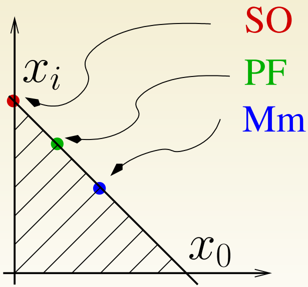


Comment choisir x_0 parmi les points Pareto optimal ?

4 connexions / 3 liens.



$$\begin{cases} x_1 + x_0 \leqslant 1, \\ x_2 + x_0 \leqslant 1, \\ x_3 + x_0 \leqslant 1. \end{cases}$$



Comment choisir x_0 parmi les points Pareto optimal ?

$$\begin{cases} x_0 = 0.5, \\ x_1 = x_2 = x_3 = 0.5 \end{cases}$$ Equité Max-Min

$$\begin{cases} x_0 = 0, \\ x_1 = x_2 = x_3 = 1 \end{cases}$$ Optimum Social

$$\begin{cases} x_0 = 0.25, \\ x_1 = x_2 = x_3 = 0.75 \end{cases}$$ Équité Proportionnelle

Famille d'équité

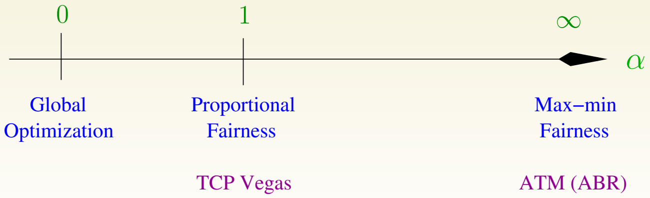
Introduite par Mo et Walrand

utilité

allocation

$$\max \sum_{n \in N} \frac{f_n(x_n)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

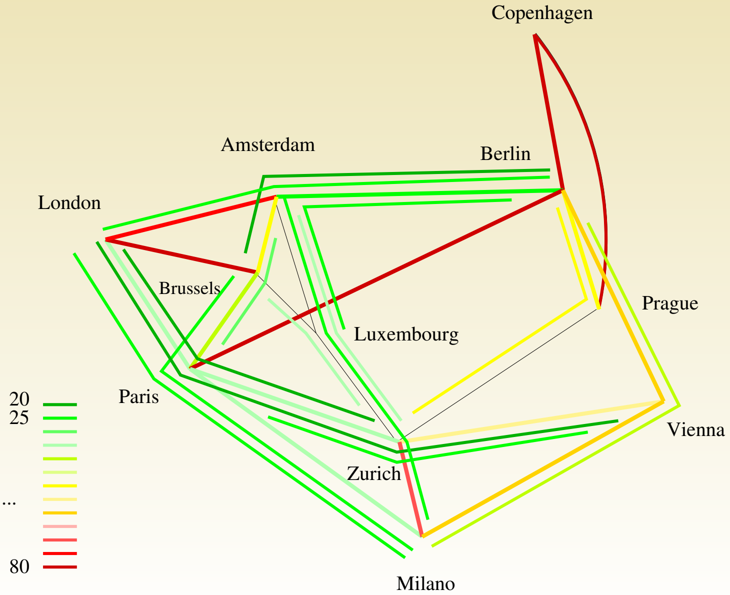
joueur



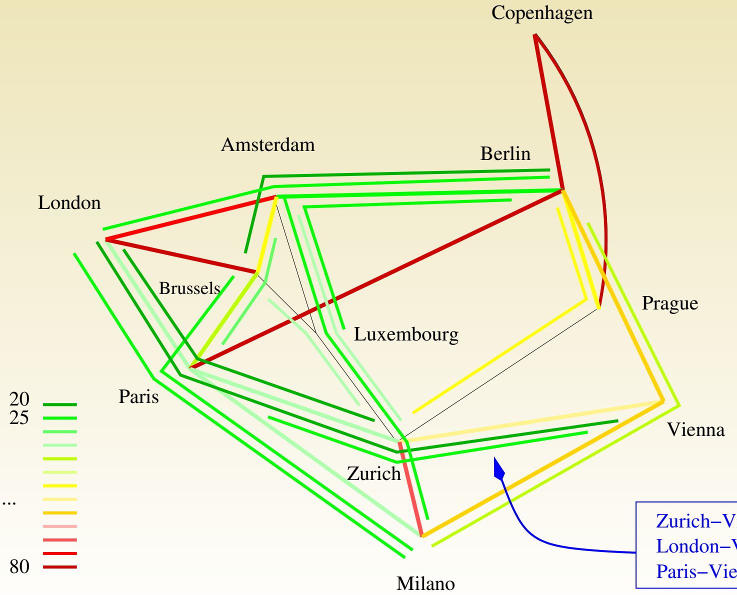
Outline

Famille d'équité : exemple

Le réseau COST (Equité Prop.)



Famille d'équité : exemple
Le réseau COST (Equité Prop.)



Zurich–Vienna	55.06
London–Vienna	19.46
Paris–Vienna	25.48

D'autres exemples

- Allocation de bande passante : dans les réseaux filaires ou sans fils (allocation jointe de bande passante / puissance)
- Allocation de porteuses : entre des opérateurs dans les systèmes satéllitaires

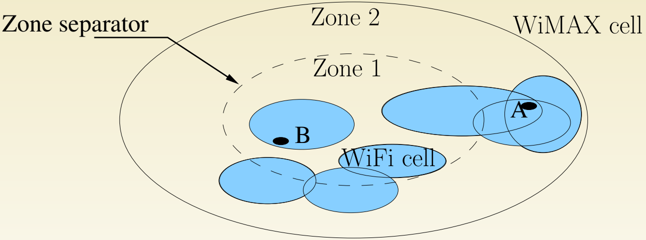
Challenges :

- Réseaux Non-convexes : communications sans fils, systèmes de partage de charge
- Développer des algorithmes distribués

Outline

Outline

Comment trouver un mécanisme d'association entre les mobiles et les réseaux à la fois efficace et équitable ?



Idée générale

- Choisir une fonction objectif à optimiser.

  Ici α-équité sur les débits, i.e. $F = \max\limits_{\text{associations}} \sum\limits_{\text{mobiles}} \frac{\text{débit}^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

Idée générale

- Choisir une fonction objectif à optimiser.

  Ici α-équité sur les débits, i.e. $F = \max_{\text{associations}} \sum_{\text{mobiles}} \frac{\text{débit}^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

- Trouver des fonctions d'utilités pour chaque mobile tel que F est une fonction potentielle pour elles :
  Ici, l'utilité d'un utilisateur est son α-débit moins son impact (la diminution de α-débit qu'il cause aux autres)

Idée générale

- Choisir une fonction objectif à optimiser.

  Ici α-équité sur les débits, i.e. $F = \max_{\text{associations}} \sum_{\text{mobiles}} \frac{\text{débit}^{1-\alpha}}{1-\alpha}$
- Trouver des fonctions d'utilités pour chaque mobile tel que F est une fonction potentielle pour elles :
  Ici, l'utilité d'un utilisateur est son α-débit moins son impact (la diminution de α-débit qu'il cause aux autres)
- Mettre en place un protocole réseau utilisé par les mobiles qui soit un mécanisme d'apprentissage des EN pures pour ses fonctions d'utilités

Les mécanismes d'apprentissage

- Branche (récente) de la théorie des jeux : théorie algorithmique des jeux
- Idée :
  - Chaque joueur choisit une stratégie mixte initiale
  - A chaque étape :
    - Chaque joueur envoie un paquet sur un réseau (choisi à partir de son vecteur de stratégie)
    - Le joueur reçoit une valeur d'utilité
    - A partir de sa fonction d'utilité, il met à jour son vecteur de stratégie

On montre que lorsque les mises à jour sont bien choisies, on converge progressivement vers un équilibre de Nash.
Une possibilité est d'approcher les dynamiques de réplications, i.e. la façon dont les populations d'espèces vivantes évoluent.

Jeux évolutionaires

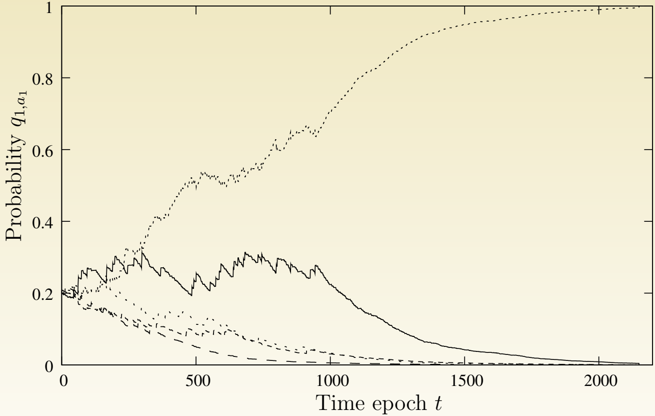
- Les stratégies des utilisateurs changent avec le temps au mesure qu'ils s'adaptent à l'environnement
- Différentes dynamiques possibles, par exemple, les dynamiques de réplications :

$$\dot{y}_q^s = y_q^s \left(F_q^s(y) - \frac{1}{\hat{d}_q} \sum_{i=1}^{S_q} y_q^i F_q^i(y) \right).$$

- Les équilibres sont appelés ESS (Evolutionary Stable Strategies)
- C'est un type particulier d'équilibre de Nash
- Stables par une déviation d'une (petite) fraction d'utilisateurs

Convergence de l'algorithme

Un exemple : pour un utilisateur qui peut accéder à 5 réseaux :



Outline

Other hot topics in game theory

- Mechanism design : how to design rules of a game so as to achieve a specific outcome, even though each player is selfish. Done by setting up a structure in which each player has incentive to behave as the designer intends. (Leonid Hurwicz, Eric Maskin et Roger Myerson, Nobel 2007)
- Auctions : resource allocation in P2P, frequency allocation in wireless.
- Impact of non-cooperative players in a cooperative environment : free-riders of P2P, UDP clients in TCP networks.
- Fair division or cake cutting problem : how to divide resource such that all recipients believe that they have received their fair share (envy-free). (Steven Brams, Alan Taylor)

Even more topics in game theory

- Election : Plurality (traditional) voting systems are not necessarily fair.
- Stable marriages : Problem of finding a matching, where no element of the first set prefers an element of the other set that also prefers the first element, "Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems : An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithms", Donald Knuth
- Super-modular games : utility functions are such that higher choices by one player make one's own strategy higher look relatively more desirable.
- Games with incomplete information or Bayesian games : some player have private information about something relevant to their decision making
- Games with imperfect information : players do not perfectly observe the actions of other players.

Outline

Slides available at :
http://mescal.imag.fr/membres/corinne.touati/talks.php