An analysis of Pricing Competition for Queued Services with Multipe Providers

Workshop Tarification Concurrence et Revenue Management
Modélisation et applications

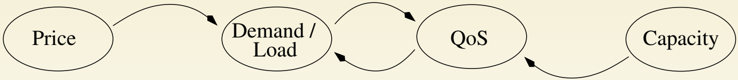
Corinne Touati,
joint work with Parijat Dube and Laura Wynter

INRIA, LIG laboratory

Dec., 2007

Décrire les relations d'inter-dépendances entre prix, part de marché et qualité de service dans un système simple de compétition.

> Les Qualités de service ne sont pas fixées par les fournisseurs mais dépendent de la quantité d'utilisateurs accédant au service.



But: Mener une analyse analytique dans un cadre simplifié,
Déterminer la stratégie optimale pour les opérateurs en terme de prix et de QoS pour optimiser son profit.

Système

- service électronique proposé par plusieurs fournisseurs en compétition
- service offert à un certain prix et avec un délai garanti (QoS)
- Les utilisateurs peuvent librement rejoindre chacun des opérateurs
- chaque client est caracterisé par sa propension à payer un prix plus élevé pour une meilleure qualité de service (hétérogénéité des utilisateurs)
  - Chaque utilisateur est non-atomique, c'est-à-dire individuellement insignifiant

Difficulté: les délais garantis sont en fait fonction des capacités des serveurs utilisés et de la part de marché de l'opérateur (elle même fonction du délai, etc.).

Questions

Simplifications:

- Système limité à 2 fournisseurs de service
- Utilisateurs adhèrent nécessairement à l'un ou l'autre des fournisseurs (ne peuvent renoncer à l'offre)
- QoS représenté par le délai & relations simples de délais (M/M/1)

Questions adressées:

- Quelles parts de marchés peuvent être obtenues au(x) point(s) d'équilibre(s)?
- Quels sont les prix optimaux et les meilleurs choix de qualité de service possible pour les opérateurs?

Outline

1. Modélisation
   - Service offert
   - Utilisateurs
   - Jeu: optimisation des profits
2. Equilibres possibles (choix possibles de prix / QoS / capacité)
   - Existence et unicité des équilibres
   - Sensibilité des équilibres
3. Maximisation de profit

Outline

1. Modélisation
   - Service offert
   - Utilisateurs
   - Jeu: optimisation des profits
2. Equilibres possibles (choix possibles de prix / QoS / capacité)
   - Existence et unicité des équilibres
   - Sensibilité des équilibres
3. Maximisation de profit

Modélisation: service offert

- Service offert: chaque entreprise annonce une paire (p_i, d_i) (prix, délai garanti)
- Qualité-de-service: le système est modélisé par une file M/G/1/PS:

$$\text{Espérance de délai :} D_i = \frac{1}{\mu c_i - \lambda L_i}$$

Nous considérons le cas où $D_i = d_i$ (le délai garanti est égal à l'espérance du délai).

μ	taux de service
c_i	capacité
λ	taux d'arrivée
L_i	part de marché de l'opérateur i

Modélisation: utilisateurs (1/2)

- Demande d'un utilisateur: les clients sont associés à un paramètre de compromis. La fonction de coût ("disutility") de l'utilisateur n est fonction du délai observé et du prix dont il doit s'affranchir:

$$C_n(p, d) = \alpha_n p + (1 - \alpha_n)\Gamma d$$

(Γ est introduit pour satisfaire les compatibilités de dimension (1 €$/sec$)).

Modélisation: utilisateurs (1/2)

- Demande d'un utilisateur: les clients sont associés à un paramètre de compromis. La fonction de coût ("disutility") de l'utilisateur n est fonction du délai observé et du prix dont il doit s'affranchir:

$$C_n(p,d) = \alpha_n p + (1-\alpha_n)\Gamma d$$

(Γ est introduit pour satisfaire les compatibilités de dimension (1 €$/sec$)).

- Rationalité Les clients étant rationnels, ils joignent l'entreprise minimisant leur fonction de coût.

client n rejoint l'entreprise i minimizant $\alpha_n p_i + (1-\alpha_n)\Gamma d_i$.

Modélisation: utilisateurs (2/2)

- Non-atomicité Le marché est caractérisé par la distribution F des valeurs des compromis α.

Modélisation: utilisateurs (2/2)

- Non-atomicité Le marché est caractérisé par la distribution F des valeurs des compromis α.

  Par exemple, dans le traffic internet, le pourcentage des petites valeurs de α est plus important que celle des grandes valeurs.

Modélisation: utilisateurs (2/2)

- Non-atomicité Le marché est caractérisé par la distribution F des valeurs des compromis α.

- Parts de marché Pour deux opérateurs, on peut supposer que: $p_1 > p_2$ et $d_1 < d_2$ (hypothèse non restrictive).

Modélisation: utilisateurs (2/2)

- Non-atomicité Le marché est caractérisé par la distribution F des valeurs des compromis α.
- Parts de marché Pour deux opérateurs, on peut supposer que: $p_1 > p_2$ et $d_1 < d_2$ (hypothèse non restrictive).

Un utilisateur (infinitésimal) rejoint donc l'opérateur 1 si:

$$\alpha p_1 + \Gamma(1-\alpha)d_1 < \alpha p_2 + \Gamma(1-\alpha)d_2$$

$$\text{i.e. } \alpha < \frac{d_2 - d_1}{p_1 - p_2 + \Gamma(d_2 - d_1)}$$

Modélisation: utilisateurs (2/2)

- Non-atomicité Le marché est caractérisé par la distribution F des valeurs des compromis α.
- Parts de marché Pour deux opérateurs, on peut supposer que: $p_1 > p_2$ et $d_1 < d_2$ (hypothèse non restrictive).

  Alors les parts de marché sont respectivement de:

$$L_1 = F\left(\frac{\Delta_d}{\Delta_p + \Gamma\Delta_d}\right) \text{ et } L_2 = 1 - F\left(\frac{\Delta_d}{\Delta_p + \Delta_d}\right)$$

  avec $\Delta_d = d_2 - d_1$ et $\Delta_p = p_1 - p_2$.

- Profit de l'entreprise: Pour chaque opérateur i:

$$\Pi_i = p_i \lambda L_i - \xi_i c_i$$

ξ_i	coût marginal pour louer la capacité c_i

Les opérateurs annoncent publiquement leur délai (QoS) et le prix demandé, et plannifient la capacité de leur serveur en conséquence.

Le but de chaque opérateur est de maximiser son profit.

Outline

1. Modélisation
   - Service offert
   - Utilisateurs
   - Jeu: optimisation des profits

2. Equilibres possibles (choix possibles de prix / QoS / capacité)
   - Existence et unicité des équilibres
   - Sensibilité des équilibres

3. Maximisation de profit

Theorem 1: Existence et unicité de l'équilibre.

Pour toute fonction continue F de paramètre α et toute paire (p_1, p_2) avec $p_1 > p_2$, le système admet une solution (L_1, L_2) (ou de façon équivalent une paire (d_1, d_2)) si et seulement si:

$$c_1 + c_2 > \frac{\lambda}{\mu} \text{ et } c_2 - c_1 \leqslant \frac{\lambda}{\mu}$$

De plus, la solution est unique.

La première condition assure que, ensemble, les deux opérateurs peuvent écouler l'ensemble du trafic.
La seconde condition est plus surprenante: comme $p_1 > p_2$ et $d_1 < d_2$, l'intuition conduirait à $c_1 > c_2$. Le théorème affirme qu'en fait, il est possible que c_1 soit inferieur à c_2 du moment que leur différence n'est pas trop importante.

Existence et unicité des équilibres (2/2)

- Corrollaire: En demandant un prix élevé pour décourager les clients de venir utiliser son service, un provider malicieux peut annoncer une meilleure QoS (ici un délai inférieur) que son rival tout en ayant une plus faible capacité ($c_1 < c_2$).

C'est possible par exemple avec
$\lambda = 5$, $\mu c_1 = 3$, $\mu c_2 = 4$, $\Delta_p = 28/9$, alors $L_2 = 0.7$, $d_1 = 2/3$ et $d_2 = 2$.

Parts de marché (2/2)

Theorem 2: Sensitivité de l'équilibre.

La part de marché du second opérateur, L_2 est croissante en c_2, en p_1, en $p_1 - p_2$ et λ, et est décroissante en c_1 et p_2.

Corrollaire: dans un marché en compétition, une augmentation de la charge profite au provider ayant le plus petit QoS: en effet, lorsque la taille du marché augmente, la différence entre les QoS proposées diminue et donc l'impact relatif des prix devient prépondérant pour les utilisateurs.

Outline

1. Modélisation
   - Service offert
   - Utilisateurs
   - Jeu: optimisation des profits
2. Equilibres possibles (choix possibles de prix / QoS / capacité)
   - Existence et unicité des équilibres
   - Sensibilité des équilibres
3. Maximisation de profit

Maximisation de profit: deux scénarios

1er cas: $\mu c_2 < \lambda$

Alors le second opérateur ne peut gérer l'ensemble des demandes
Donc, pour tout p_1, on a $L_1 > 0$ et donc le prix optimal $\hat{p_1}$ est infini.

$\Rightarrow$ demande captive, profits infinis

Maximisation de profit: deux scénarios

1er cas: $\mu c_2 < \lambda$

Alors le second opérateur ne peut gérer l'ensemble des demandes

Donc, pour tout p_1, on a $L_1 > 0$ et donc le prix optimal $\hat{p_1}$ est infini.

$\Rightarrow$ demande captive, profits infinis

2eme cas: $\mu c_2 \geqslant \lambda$, il existe un prix seuil p_2^* tel que:

- si $p_2 \geqslant p_2^*$ alors Π_1 est maximal pour $p_1 = p_2$ ("oeil pour oeil" / "tit-for-tat")
- sinon, la valeur optimale pour p_1 est strictement plus grande que p_2 (valeur seuil)

$\Rightarrow$ guerre des prix "tit-for-tat" avec seuil

Maximisation de profit: cas “tit-for-tat avec seuil”

- si $p_2 \geqslant p_2^*$ alors Π_1 est maximal pour $p_1^{\text{opt}} = p_2$
- sinon, $p_1^{\text{opt}} > p_2$ (valeur seuil)

p_2^{opt} (maximizant Π_2) est toujours inférieure à p_1 (strictement)

$\rightsquigarrow$ dynamique oscillatoire

Mecanisme d’oscillation

- Les instants de réaction sont $\{T_n, n = 1...\}$
- Aux instants T_{2k+1} l’opérateur 1 réajuste son prix, et l’opérateur 2 aux instants T_{2k}
- supposons qu’à l’instant $2.n$, $p_2^{2n} \geqslant p_2^*$,

Maximisation de profit: cas “tit-for-tat avec seuil”

- si $p_2 \geqslant p_2^*$ alors Π_1 est maximal pour $p_1^{\text{opt}} = p_2$
- sinon, $p_1^{\text{opt}} > p_2$ (valeur seuil)

p_2^{opt} (maximizant Π_2) est toujours inférieure à p_1 (strictement)

Mecanisme d'oscillation

Phase décroissante:

- alors a $2.n+1$, on a $p_1^{2.n+1} = p_2^{2.n}$
- $p_2^{2.n+2} < p_1^{2.n+1}$

et ainsi de suite jusqu'à l'époque $2t$ ou $p_2^{2t} < p_2^*$, et alors:

Phase croissante

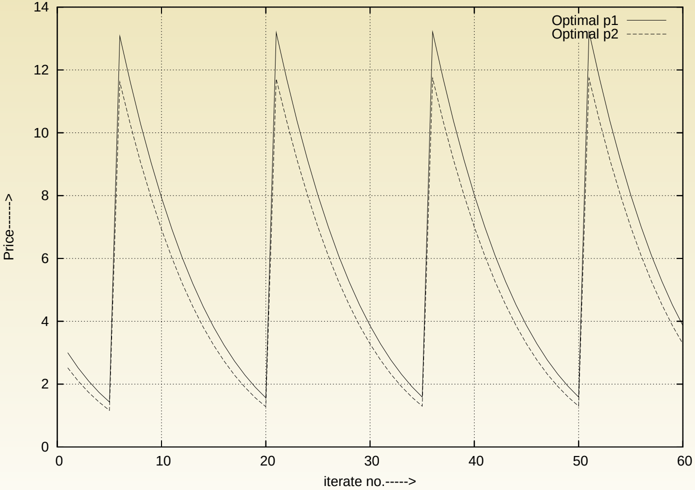
- alors $p_1^{2.t+1} > p_2^{2.t}$
- $p_2^{2.t} < p_2^{2.t+2} < p_1^{2.t+1}$

jusqu'à ce que $p_2^{2t} \geqslant p_2^*$.

Ainsi l'amplitude et la périodicité des oscillations est indépendante des conditions initiales.

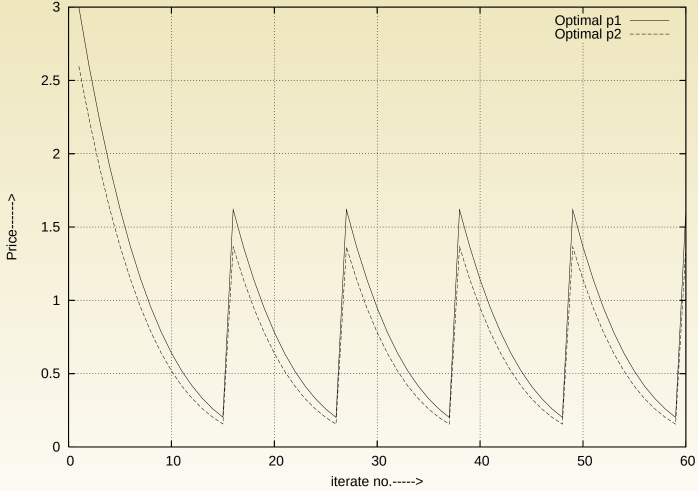
Maximisation de profit: simulations

$$c_1 = 7, c_2 = 3, \lambda = 4, \mu = 2, p_2^0 = 3$$



Distribution uniforme.

$$c_1 = 7, c_2 = 3, \lambda = 4, \mu = 2, p_2^0 = 3$$



Beta distribution avec $a = 1$ et $b = 5$.

Conclusions

- Etude des interdépendances entre prix / part de marché / QoS sur un exemple simple
- Existence (et unicité) d'un équilibre sous des conditions simples sur les valeurs des capacités et des taux d'arrivée et de service
- Une augmentation du traffic est bénéficiaire à l'opérateur ayant le prix le faible
- Obtention un scénario novateur de guerre des prix ne menant pas à un profit nul
- "Future work": étudier les équilibres en terme d'optimisation jointe sur les prix et les capacités des opérateurs.