UFR IMA

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER GRENOBLE 1
SCIENCES, TECHNOLOGIE, MEDECINE

Informatique & Mathématiques Appliquées — Sciences, Technologie, Médecine

Exercices d'algorithmique (annales d'examens)

Jean-Marc.Vincent@imag.fr

Préambule (à lire impérativement)

Ce document contient une compilation des exercices posés en examen d'algorithmique en licence d'informatique à l'UFR IMA de l'Université Joseph Fourier. Il est destiné aux étudiants de l'UE ALGO 5 pour s'entraîner à faire des exercices sur la fin de ce semestre. Comme le contenu pédagogique à évolué ces dernières années, certains exercices seront plus difficiles et ne correspondent pas au programme actuel. En particulier, l'écriture de programmes en langage C ne relève plus de cette UE.

Certains exercices comportent, malgré mes efforts, des coquilles qui avaient été corrigées le jour de l'épreuve mais n'ont pas été actualisées. Je remercie donc par avance les étudiants qui amélioreront ce document par leurs remarques.

Pour des raisons évidentes, ces sujets ne sont pas corrigés, une version avec des indications est en cours d'écriture. En cas de difficultés sérieuses, vous pouvez prendre contact avec vos enseignants de TD. Vous trouverez ci-dessous un accès aux différents exercices à partir de mots clés correspondant aux grandes parties de l'UE ALGO 5

Bon courage J.-M. V.

Thèmes (par numéro d'exercice)

Calcul de coût [3,14,15,17, 21,23,24, 39, 43, 44, 45, 47]

Comptage [16,23,25, 32, 34, 37, 40, 44, 46]

Enrichissement de structure [2327, 42]

Listes et ensembles [5,642,19,20, 21 ,24, 28, 35, 37, 41, 45, 47, 48, 49,17]

Manipulation de structures [33, 39, 48,13]

Parcours [15,22,28, 38, 41, 42, 45, 50]

Recherche [4,25]

Structures d'arbres [1,2,7,16,22,23,25, 26, 31, 34, 38, 39, 40, 42, 50, 51, 18,,10,12]

Tables de hachage [14,19, 29, 28, 49]

Tri [6,9,15,20, 26, 27, 31, 32, 36, 43, 17, 47,11]

Table des matières

1 Feuilles *(Quick de novembre 2011)* **4**

2 Tas ternaire *(Quick de novembre 2011)* **4**

3 C'est un truc... *(Quick d'octobre 2011)* **4**

4 Table ordonnée *(Quick d'octobre 2011)* **4**

5 Pile, File le retour *(Quick d'octobre 2011)* **5**

6 Tri par file *(Quick d'octobre 2011)* **5**

7 Arbres binaires complets *(Examen de décembre 2011)* **5**

8 ADE *(Examen de décembre 2011)* **6**

9 Un tri linéaire ? *(Examen de décembre 2011)* **6**

10 Recherche dans un tas *(Examen de décembre 2010)* **7**

11 Inversion *(Examen de décembre 2010)* **7**

12 Plus grand stable *(Examen de décembre 2010)* **8**

13 Algorithme de couverture *(Examen de décembre 2010)* **8**

14 Algorithme de Karp-Rabin *(Examen de décembre 2009)* **9**

15 Recherche des k plus grands éléments *(Examen de décembre 2009)* **10**

16 Feuilles *(Examen de décembre 2009)* **11**

17 Un peu de couleur *(Examen de juin 2009)* **11**

18 Est-ce un tas ? *(Examen de juin 2009)* **11**

19 Anagrammes de phrase *(Examen de juin 2008)* **12**

20 Tableau trié *(Examen de juin 2008)* **12**

21 Extraction de couleurs *(Examen de décembre 2007)* **13**

22 Premier et second *(Examen de décembre 2007)* **13**

23 Arbres pondérés *(Examen de décembre 2007)* **14**

24 Matrice *(Examen de juin 2007)* **15**

25 B-arbre *(Examen de décembre 2006 et juin 2007)* **15**

26 Tous en rang *(Examen de juin 2007)* **16**

27 Tous en rang (autre version) *(Examen de décembre 2006)* **16**

28 Ensemble *(Examen de décembre 2006)* **17**

29 Hachage *(Examen de décembre 2006)* **17**

30 Mariages ***(Examen de décembre 2006)*** **18**

31 Tri par arbre ***(Examen de décembre 2006)*** **18**

32 Suites 2-3 triées ***(Examen de décembre 2005)*** **19**

33 Changement de racine ***(Examen de décembre 2005)*** **19**

34 Arbres binaires ***(Examen de juin 2005)*** **20**

35 File à double entrée ***(Examen de juin 2005)*** **21**

36 Deuxième maximum ***(Examen de juin 2005)*** **21**

37 Sortie de pile ***(Examen de décembre 2004)*** **21**

38 Parcours ***(Examen de décembre 2004)*** **22**

39 Faire tourner les arbres ***(Examen de décembre 2004)*** **22**

40 Compter les tas ***(Examen de décembre 2003)*** **23**

41 Collection ***(Examen de décembre 2003)*** **24**

42 Arbres binaires de recherche ***(Examen de décembre 2003)*** **26**

43 Bulles ***(Quick octobre 2007)*** **27**

44 Fibonnacci ***(Quick octobre 2007)*** **28**

45 Fusion de liste ***(Quick octobre 2007)*** **29**

46 Relations antisymétriques ***(Quick octobre 2005)*** **29**

47 Tri à 3 couleurs ***(Quick octobre 2005)*** **29**

48 File en tableau ***(Quick octobre 2005)*** **29**

49 Eliminer les doublons ***(Quick novembre 2005)*** **30**

50 Réservation et conflit ***(Quick novembre 2005)*** **31**

51 Comprimons ***(Quick novembre 2006)*** **31**

1 Feuilles *(Quick de novembre 2011)*

Question 1.1 : Arbres et feuilles

Dans un arbre binaire ayant n nœuds, calculer le nombre minimal de feuilles m_n et le nombre maximal de feuilles M_n, le calcul devra être rédigé avec soin.

cpt-quest0

2 Tas ternaire *(Quick de novembre 2011)*

On appelle arbre ternaire un arbre tel que tout nœud possède de 0 à 3 fils, nommés $fils_a$, $fils_b$, $fils_c$.

Question 2.2 :

1. Calculer la hauteur d'un arbre ternaire ayant n nœuds.
2. Rappeler la définition d'un arbre ordonné.
3. Proposer une implantation d'un tas ternaire (arbre ordonné tassé à gauche) dans un tableau.
4. Pour x nœud de l'arbre, écrire les primitives $Père(x)$, $Fils_a(x)$, $Fils_b(x)$ et $Fils_c(x)$.
5. Pour T tas ternaire et x nœud, écrire la primitive $Insérer(x, T)$ qui insère un nouveau nœud dans le tas.
6. Pour T tas ternaire, écrire la primitive $Extraire(T)$ qui retourne un nœud d'étiquette maximale et le supprime du tas T.
7. Calculer le coût des primitives $Insérer(x, T)$ $Extraire(T)$ en nombre de comparaisons d'étiquettes de nœuds.
8. Faire la trace d'exécution du tri par tas ternaire du tableau [C,A,R,I,B,O,U].
9. Calculer la complexité de l'algorithme de tri par tas ternaire. Comparer cette complexité avec celle du coût du tri par tas (binaire). Commenter votre résultat, peut-on le généraliser ?

3 C'est un truc... *(Quick d'octobre 2011)*

Truc(n)
  pour $i = 1$ **à** n **faire**
    $j = 1$
    tant que $j * j \leqslant i$ **faire**
      Traiter(j)
      $j = j + 1$
    fin tant que
  fin pour

Question 3.1 : Coût d'un algorithme

Calculer le coût de l'algorithme **Truc** en nombre d'appels à la fonction **Traiter** (on pourra laisser le coût sous la forme $\sum \cdots$). Donner l'ordre de grandeur de ce coût (indication : encadrer la somme).

cpt-quest0

4 Table ordonnée *(Quick d'octobre 2011)*

On considère un tableau ordonné T de n **entiers distincts** (ces entiers peuvent être négatifs), le tableau T est indicé de 1 à n. L'objectif est de construire un algorithme qui renvoie un indice i tel que $T[i] = i$ ou 0 s'il n'en existe pas.

Question 4.2 : Recherche en table

1. Écrire un algorithme "force brute", qui renvoie un indice i tel que $T[i] = i$ ou 0 s'il n'en existe pas. Calculer son coût.
2. Montrer que si $T[j] > j$ alors il en est de même pour tout $k \geqslant j$.
3. En déduire un algorithme en $\mathcal{O}(\log n)$, prouver que le coût est en $\mathcal{O}(\log n)$.

cpt-quest0

5 Pile, File le retour *(Quick d'octobre 2011)*

Question 5.3 : P/F-iles

On dispose des types abstraits classiques **pile** et **file** avec les opérateurs de construction et de transformation classiques.

Écrire un algorithme qui prend en argument une pile P et renvoie une nouvelle pile P' contenant les mêmes éléments que P mais rangés dans l'ordre inverse. (Le sommet de P' est l'élément au fond de $P, \cdots$, et le sommet de P se retrouve au fond de P').

Écrire un algorithme qui prend en argument une file F et renvoie une nouvelle file F' contenant les mêmes éléments que F mais rangés dans l'ordre inverse. (Le premier élément de F' est le dernier élément de $F, \cdots$, et le premier de F se retrouve le dernier de F').

6 Tri par file *(Quick d'octobre 2011)*

Pour trier n objets distincts on dispose de l'opérateur **fusion** qui prend en argument deux listes triées et renvoie la fusion triée de ces deux listes. On utilise une file de listes que l'on initialise avec n listes, chacune contenant un des objets à trier.

L'algorithme opère en prenant les deux premières listes de la file, en opérant leur fusion et en enfilant le résultat dans la file. L'algorithme se termine lorsque la file ne contient plus qu'une seule liste, résultat du tri.

Question 6.1 : Tri par file

1. Donner les étapes de l'algorithme sur l'exemple C, A, R, I, B, O, U, S.
2. Écrire l'algorithme de tri par file/fusion.
3. Donner une preuve de votre algorithme.
4. Calculer le coût de votre algorithme.
5. Quel algorithme obtient-on en remplaçant la file par une pile ?
6. Question subsidiaire : Écrire l'algorithme de fusion de listes triées implémentées par des listes circulaires doublement chaînées et calculer son coût.

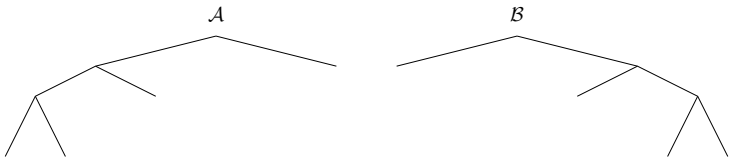
7 Arbres binaires complets *(Examen de décembre 2011)*

On considère des arbres binaires complets, c'est à dire que tout nœud est soit une feuille soit un nœud interne avec 2 fils. À un arbre $\mathcal{A}$ on associe une séquence de bits $S(\mathcal{A})$ définie de la manière suivante

$$S(\mathcal{A}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathcal{A} \text{ est réduit à une feuille ;} \\ 0.S(\mathcal{A}_1)S(\mathcal{A}_2) & \text{si } \mathcal{A}_1 \text{(resp } \mathcal{A}_2\text{) est le sous-arbre gauche (resp droit) de } \mathcal{A}. \end{cases}$$

Question 7.1 : Exemples de codage d'arbre

Donner la valeur de $S(\mathcal{A})$ et $S(\mathcal{B})$ pour les 2 arbres suivants :



Question 7.2 : Exemples de décodages d'arbres

Dessiner les arbres correspondant aux mots $m_1 = 0001111$ et $m_2 = 0101011$.

Question 7.3 : Propriétés

Pour un arbre $\mathcal{A}$ de taille n, interpréter le nombre de 0 et de 1 dans $S(\mathcal{A})$.

Question 7.4 :

Toute séquence de bits représente-t'elle un arbre binaire complet ?

Question 7.5 : Unicité

Montrer que si deux arbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ vérifient $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{B})$ alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont la même structure.

Question 7.6 : Algorithme de codage

Écrire l'algorithme de codage d'un arbre $\mathcal{A}$.

Question 7.7 : Algorithme de décodage

Écrire l'algorithme de décodage qui à partir d'un code d'arbre reconstruit l'arbre $\mathcal{A}$ correspondant.

8 ADE *(Examen de décembre 2011)*

On suppose que n cours $c_1, \cdots, c_n$ sont programmés sur des plages horaires données par les fonctions $debut(c_i)$ et $fin(c_i)$.

Question 8.1 : Algorithme d'affectation

Écrire un algorithme attribuant une salle à chaque cours, minimisant le nombre total de salles occupées, sachant que 2 cours ne peuvent pas avoir lieu dans la même salle. *Indication : on pourra faire un prétraitement sur les cours avant de réaliser l'allocation.*

Question 8.2 : Preuve

Rédiger avec soin la preuve de l'optimalité de votre algorithme et calculer son coût.

9 Un tri linéaire ? *(Examen de décembre 2011)*

On suppose que n objets sont à trier selon une clé dont la valeur est un nombre réel compris entre 0 et 1. Pour réaliser le tri on construit une nouvelle structure de donnée constituée d'un tableau L de n listes d'objets. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, les objets de la liste $L[i]$ ont une clé dans l'intervalle $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[$ et sont rangés par ordre croissant dans la liste.

L'algorithme de tri consiste à insérer tous les objets dans la structure L, puis de parcourir la structure pour obtenir la liste des objets triés.

Question 9.1 : Exemple

Pour $n = 10$ et le tableau objet/clé suivant, donner la valeur de la structure L après l'insertion des n objets.

Objet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Clé	0.32	0.05	0.99	0.21	0.82	0.79	0.06	0.66	0.75	0.46

Question 9.2 : Insertion

Écrire l'algorithme d'insertion d'un objet dans une liste ordonnée par clés croissantes. Calculer le coût de l'algorithme en nombre de comparaisons de clés (au mieux et au pire).

Question 9.3 : Parcours

Écrire l'algorithme qui parcours la structure L et renvoie la liste des objets triés par clé croissante. Donner le coût de ce parcours.

Question 9.4 : Coût de l'algorithme

Quel est le coût au pire et au mieux de cet algorithme en nombre de comparaisons de clés ?

On suppose maintenant que les valeurs des clés sont réparties uniformément su $[0, 1[$. C'est à dire que tout se passe comme si les clés étaient générées aléatoirement de manière indépendante et de loi uniforme sur $[0, 1[$. On note N_i le nombre d'objets dans la liste $L[i]$ à la fin de l'insertion des n objets.

Question 9.5 : Loi de N_i

Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire N_i ? Calculer sa moyenne $\mathbb{E}N_i$ et montrer que $\mathbb{E}N_i^2 = 2 - \frac{1}{n}$.

Question 9.6 : Complexité de l'algorithme

Donner la complexité en moyenne de l'algorithme et commenter ce résultat.

10 Recherche dans un tas *(Examen de décembre 2010)*

Question 10.1 : Tas (définition)

Rappeler brièvement la définition de la structure de donnée *Tas* implantée dans un tableau, on supposera que les éléments du tas sont comparables au sens d'une relation d'ordre $\prec$ et que le *Tas* est construit pour cette relation d'ordre (élément maximum au sommet du tas).

Écrire un algorithme qui vérifie qu'un tableau est un tas. Calculer le nombre de comparaisons entre éléments du tableau effectuées par votre algorithme.

Question 10.2 : Position des éléments les plus grands

Dans un tas, où se trouve la valeur la plus grande, la $2^{\text{ième}}$ valeur la plus grande, la troisième ?

Question 10.3 : Valeur minimale

Écrire un algorithme qui cherche la valeur minimale dans un tas de taille n. Calculer son coût au pire. Pourquoi cette recherche est, en ordre de grandeur, équivalente à parcourir tout le tas ?

11 Inversion *(Examen de décembre 2010)*

Une inversion dans un tableau T de taille n est un couple d'indices (i, j) vérifiant $i < j$ et $T[i] > T[j]$.

Question 11.1 : Nombre minimal d'inversions

Donner pour un tableau de taille n le nombre minimum d'inversions et fournir un exemple de tableau donnant cette valeur minimale.

Question 11.2 : Nombre maximal d'inversions

Montrer que le nombre maximal d'inversions est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Question 11.3 : Algorithme bulldozer

Écrire un algorithme qui calcule le nombre d'inversions en $\mathcal{O}(n^2)$.

Question 11.4 : Raffinement

Écrire un algorithme qui calcule le nombre d'inversions en $\mathcal{O}(n \log n)$.

12 Plus grand stable *(Examen de décembre 2010)*

On appelle partie **stable** d'un arbre A un ensemble S de nœuds de l'arbre qui ne sont pas voisins deux à deux. On suppose que A est un arbre binaire et qu'à chaque nœud x on associe un poids $p(x) \geqslant 0$. L'objectif est de trouver un algorithme récursif qui calcule un sous-ensemble stable de poids maximal.
Pour tout nœud x de l'arbre on note :
- $S(x)$ le stable maximal du sous-arbre de racine x, on note $P(x)$ son poids (x n'est pas forcemment dans $S(x)$) ;
- $S'(x)$ le stable maximal du sous-arbre de racine x et ne contenant pax x, on note $P'(x)$ son poids.

Question 12.1 : Relation de récurrence

Donner une formule de récurrence entre $S(x)$, $S'(x)$ et $S(gauche(x))$, $S'(gauche(x))$, $S(droit(x))$, $S'(droit(x))$ et de leurs poids respectifs et de $p(x)$.

Question 12.2 : Algorithme récursif

En déduire un algoritme calculant un ensemble stable maximal. Calculer le coût de votre algorithme.

13 Algorithme de couverture *(Examen de décembre 2010)*

On se donne n points sur l'axe réel $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. On souhaite trouver le nombre minimal K tel que K intervalles $I_1, \cdots I_K$ de longueur 1 recouvrent tous les points, c'est à dire que tout point appartient, au moins, à l'un de ces intervalles.

Question 13.1 : Exemple

Donner un exemple avec n petit montrant qu'il peut y avoir plusieurs recouvrements minimaux. Donner également un exemple où ce recouvrement est unique.

Question 13.2 : Algorithme de recouvrement

Écrire un algorithme glouton qui construit les K intervalles.

Question 13.3 : Preuve

Écrire la preuve de votre algorithme.

Maintenant on se donne un ensemble de N intervalles $J_1, \cdots, J_N$, les longueurs de ces intervalles peuvent être différentes et leur union recouvre l'intervalle $[x_1, x_n]$.

Question 13.4 : Intervalles donnés

Écrire un algorithme qui calcule le nombre minimal d'intervalles nécéssaires pour recouvrir $x_1, x_2, \cdots, x_n$, bien préciser les structures de donnée utilisées. Donner une preuve de votre algorithme ainsi que sa complexité.

14 Algorithme de Karp-Rabin *(Examen de décembre 2009)*

On veut rechercher un motif M de longueur m dans un texte T de longueur n. Les textes sont exprimés dans un alphabet de K lettres. Le texte et le motif seront donnés dans deux tableaux, ces tableaux seront indicés à partir de 1.

Question 14.1 : Test d'égalité de mots

Écrire un algorithme qui teste l'égalité de deux mots. Calculer le coût de votre algorithme en nombre de comparaisons de caractères.

Afin de rechercher plus efficacement un motif, on dispose d'une fonction de hachage H sur les mots. Si A est un tableau de lettres $h(A, i, j)$ représente la valeur de hachage du sous-mot du tableau A défini de l'indice i à j inclus. On suppose que la fonction h prend des valeurs entières avec $0 \leqslant h(A, i, j) \leqslant H - 1$.

Algorithme 1 Algorithme de Karp-Rabin

Require:
T texte dans lequel le motif est recherché (tableau de caractášres)
M motif recherché (tableau de caractášres)

Ensure: Ecrit la liste des indices où démarrent le motif M dans le texte T

```
1:  n=taille(T)
2:  m=taille(M)
3:  hmotif=h(M[1..m])
4:  hcourant = h(T[1..m])
5:  pour i=1 à n-m+1 faire
6:     si hcourant=hmotif alors
7:        {Commentaire 1 :.....}
8:        si egalite(T[i..i+m-1],M[1..m]) alors
9:           {Commentaire 2 :.....}
10:          Ecrire i
11:       fin si
12:    fin si
13:    hcourant= h(T[i+1..i+m])
14:    {Commentaire 3 :.....}
15: fin pour
```

Question 14.2 : Commentaires

Écrire les commentaires 1, 2 et 3 et calculer le coût maximal de cet algorithme en nombre de comparaisons de caractères.

Question 14.3 : Propriétés de h

Quelles sont les propriétés que h doit vérifier pour que cet algorithme soit efficace en moyenne ? Calculer dans ce cas le coût moyen de cet algorithme.

On suppose que chaque caractère est codé par un entier et que la fonction h s'écrit pour un mot $A = (a_1, \cdots, a_m)$

$$h(A[1..m]) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \text{ modulo } p,$$

avec p un entier donné.

Question 14.4 : h additive

Expliquer le ráŽle de l'entier p. Comment calculer $h(T[i..i+m-1])$ en fonction de $h(T[i-1..i+m-2])$, en déduire que la ligne 13 de l'algorithme ne nécessite que deux consultations du tableau T.

On se donne l'alphabet $\{A, B, C, D\}$ avec le codage standard $\{0, 1, 2, 3\}$. Soit

$$T = ABCADBBACABAC,\ M = CAB.$$

Question 14.5 : Exemple

Dérouler l'algorithme pour $p = 9$ et évaluer le nombre de comparaisons de caractères effectuées. Quel inconvénient voyez-vous à cette fonction h ?

On considère maintenant une nouvelle fonction h_1 construite sur le mot A par

$$h_1(A[1..m]) = (a_1.d^{m-1} + a_2.d^{m-2} + \cdots + a_{m-1}.d^1 + a_m.d^0) \text{ modulo } p,$$

avec d un entier donné (base).

Question 14.6 : h polynomiale

Expliquer le rôle de l'entier d. Comment calculer $h(T[i..i+m-1])$ en fonction de $h(T[i-1..i+m-2])$, en déduire que la ligne 13 de l'algorithme ne nécessite que deux consultations du tableau T.

Question 14.7 : Exemple

Dérouler l'algorithme sur le même exemple ci-dessus pour $p = 9$ et $d = 4$. Évaluer le nombre de comparaisons de caractères effectuées. Commenter votre résultat.

15 Recherche des k plus grands éléments *(Examen de décembre 2009)*

Question 15.1 : Tableau non trié (méthode 1)

En vous inspirant du tri par sélection écrire un algorithme qui par des échanges successifs positionne les k plus grands éléments dans les k premières cases du tableau. Évaluer le coût de votre algorithme en nombre de comparaisons d'éléments.

Question 15.2 : Arbre binaire de recherche (méthode 2)

Rappeler brièvement la définition d'un arbre binaire de recherche. En supposant les n éléments dans un ABR, écrire l'algorithme de recherche des k plus grands éléments. Évaluer le coût de votre algorithme en nombre de comparaisons d'éléments.

Question 15.3 : Tas (méthode 3)

Rappeler brièvement la définition de la structure de donnée *Tas*. En supposant les n éléments dans un tas, écrire l'algorithme de recherche des k plus grands éléments. Évaluer le coût de votre algorithme en nombre de comparaisons d'éléments.

Question 15.4 : Synthèse

Faire la synthèse des résultat obtenus pour les 3 structures de donnée, on précisera en particulier le coût en nombre d'opérations et en espace mémoire utilisé (si on utilise des structures de données auxiliaires).

16 Feuilles *(Examen de décembre 2009)*

On définit un arbre binaire de manière récursive par : *un arbre est soit un arbre vide noté ε, soit un couple d'arbres* (a_1, a_2). La taille d'un arbre binaire se définit également de manière récursive par la taille d'un arbre vide est 0 et la taille de $(a_1, a_2) = 1 + taille(a_1) + taille(a_2)$

Question 16.1 : Sous-arbres vides

Montrer que le nombre de sous-arbres vides d'un arbre de taille n est égal à $n + 1$.

Question 16.2 :

Donner la définition d'une feuille dans un arbre binaire. Montrer que le nombre de feuilles est inférieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$ et qu'il y a égalité si et seulement si chaque sous-arbre de l'arbre est soit une feuille, soit a deux fils.

Question 16.3 : Comptage de feuilles

Montrer que le nombre de feuilles d'un arbre est égal au nombre de sous-arbres de ayant 2 sous-arbres non-vides, plus un.

17 Un peu de couleur *(Examen de juin 2009)*

On considère un tableau T de n objets coloriés et on veut connaître le nombre de couleurs différentes des objets du tableau, puis de sélectionner un objet de chaque couleur. Pour cela on dispose d'une fonction $couleur(o)$ qui renvoie la couleur de l'objet o et d'un opérateur booléen $==$ permettant de tester l'égalité de deux couleurs.

Question 17.1 : Nombre de couleurs

Écrire un algorithme qui prend en argument un tableau T d'objets coloriés et renvoie le nombre de couleurs différentes. On justifiera les différentes structures de donnée auxiliaires dont on aura besoin et on calculera le coût de cet algorithme (en précisant les opérateurs considérés).

Question 17.2 : Liste d'objets de couleur différentes

Ecrire un algorithme qui prend en argument un tableau T d'objets coloriés et renvoie une liste L d'objets du tableau T telle que toute couleur du tableau T est portée par un et un seul objet de L. On précisera les structures de donnée utilisées et on analysera le coût de cet algorithme.

18 Est-ce un tas ? *(Examen de juin 2009)*

Question 18.1 : Qu'est ce qu'un tas ?

Donner la définition de la structure de donnée Tas. (question de cours)

Question 18.2 : Vérification

Écrire un algorithme de vérification qui prend en argument un tableau de taille n et vérifie si ce tableau est un tas

Question 18.3 : Exemple d'exécution

Donner deux exemples d'exécution sur des tas judicieusement choisis pour illustrer votre algorithme.

Question 18.4 : Coût de l'algorithme

Calculer le coût de votre algorithme et expliquer pourquoi il ne peut être inférieur à $n-1$ comparaisons pour vérifier un tas de taille n.

19 Anagrammes de phrase *(Examen de juin 2008)*

Une phrase est donnée par une liste de mots simplement chaînée. On souhaite déterminer si deux phrases sont des anagrammes, c'est à dire sont composées exactement des mêmes mots.

Par exemple les phrases

Le voleur porte la montre au bijoutier et *Le bijoutier montre la porte au voleur*

sont des phrases anagramme.

Question 19.1 : Algorithme

Ecrire un algorithme qui réalise le test d'anagramme.

Question 19.2 : Coût de l'algorithme

Calculer le coût (comparaison de couleurs) au pire et au mieux de votre algorithme en ayant deux phrase de taille n.

Question 19.3 : Amélioration de l'algorithme

Construire une structure auxiliaire et l'algorithme pour obtenir une complexité en moyenne de $\mathcal{O}(n)$.

20 Tableau trié *(Examen de juin 2008)*

Un tableau $m \times n$ est dit de *Young* si tous les éléments d'une même ligne sont triés de gauche à droite et tous ceux d'une même colonne de haut en bas. Les cases ne contenant pas d'élément sont supposées contenir $+\infty$. Le tableau Y suivant donne un tableau de *Young* 5×4 contenant les éléments $\{9, 16, 3, 2, 4, 8, 5, 14, 12\}$.

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 8 & 12 & 14 \\ \hline 3 & 9 & 16 & +\infty \\ \hline 4 & +\infty & +\infty & +\infty \\ \hline 5 & +\infty & +\infty & +\infty \\ \hline +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ \hline \end{array}$$

Question 20.1 : Propriétés élémentaires

Montrer que si $Y_{m,n} < +\infty$ alors le tableau est plein. Où se trouve le plus petit élément d'un tableau non vide ? Montrer que si $Y_{1,1} = +\infty$ alors le tableau ne contient pas d'élément.

Question 20.2 : Exemple d'insertion

On insère le nombre 6 dans la case $(2, 4)$ du tableau de l'exemple. Le "remonter" à sa place en ne faisant que des échanges avec des cases voisines

Question 20.3 : Modification (1)

On suppose que l'on change la valeur de la case (i, j) avec une valeur $v < Y_{i,j}$. Ecrire une fonction `Remonte(i,j,v)` qui "remonte" l'élément actuellement dans la case (i, j) pour le mettre à sa place ; le coût de cette fonction doit être $O(n + m)$.

Question 20.4 : Modification (2)

On suppose maintenant que que l'on change la valeur de la case (i, j) avec une valeur $v > Y_{i,j}$. Sans écrire l'agorithme, donner l'idée d'une fonction `Descente(i,j,v)` qui "descend" l'élément actuellement dans la case (i, j) pour le mettre à sa place ; quel est le coût de cette fonction ?

Question 20.5 : Insertion

Donner un algorithme qui insère un nouvel élément dans un tableau de Young $m \times n$ non plein. Quel est son coût en pire cas ?

Question 20.6 : Suppression

Donner un algorithme qui supprime le plus petit élément du tableau et qui utilise une des fonctions de la question précédente.
Quel est le coût en pire cas de cette suppression du minimum ?

Question 20.7 : Tri

En utilisant un tableau de Young $n \times n$ montrer comment on peut trier n^2 éléments en $O(n^3)$. On peut répondre à cette question sans avoir répondu à aucune autre question de ce problème.

21 Extraction de couleurs *(Examen de décembre 2007)*

Une liste d'éléments colorés est gérée par chaînage simple et circulaire dans un tableau. On souhaite construire une nouvelle liste (chaînage simple circulaire dans le même tableau) en ne gardant qu'un seul élément de chaque couleur dans la liste (évidemment on garde toutes les couleurs de la liste initiale).

Question 21.1 : Algorithme d'extraction

Ecrire un algorithme qui réalise l'extraction des couleurs.

Question 21.2 : Coût de l'algorithme

Calculer le coût (comparaison de couleurs) au pire et au mieux de cet algorithme en ayant une liste de taille n et un nombre $m \leqslant n$ de couleurs. On donnera des exemples "au mieux" et "au pire".

Question 21.3 : Amélioration de l'algorithme

En utilisant des structures auxiliaires peut-on améliorer la complexité de cet algorithme ?

22 Premier et second *(Examen de décembre 2007)*

On dispose de n éléments distincts d'un espace ordonné placés dans un tableau T indicé de 0 à $n-1$.

Question 22.1 : Algorithme premier et second

Ecrire un algorithme qui calcule simultanément l'indice du plus grand élément et du deuxième plus grand élément du tableau T.

Question 22.2 : Coût de l'algorithme

Calculer le coût au pire de cet algorithme pour une taille n du tableau.

On suppose que $n = 2^k$ et on utilise la technique des tournois pour déterminer le champion. C'est à dire que l'on on compare les éléments en position $T[2i]$ et $T[2i+1]$. On obtient un maximum qui est placé dans un deuxième tableau T' de taille $\frac{n}{2} = 2^{k-1}$.

$T'[i] = \max\{T[2i], T[2i+1]\}$.

On recommence alors la même procédure avec ce nouveau tableau. Le maximum est obtenu pour $k = 0$

Question 22.3 : Algorithme du tournoi

Exécuter cet algorithme sur le tableau initial T

$T =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f	b	g	e	l	n	i	m	k	h	j	a	p	c	o	d

Question 22.4 : Où est l'arbre ?

Expliquer la structure d'arbre sous jacente à cet algorithme. Comment l'implanter dans un tableau de taille $2n - 1$?

Question 22.5 : Le second

Calculer le coût nécessaire à la construction de l'arbre. Donner l'algorithme de calcul du second et montrer que le coût de ce calcul est en $\mathcal{O}(\log n)$.

23 Arbres pondérés *(Examen de décembre 2007)*

L'objectif de ce problème est de construire un arbre binaire de recherche (ABR) optimal sur n étiquettes, que par simplicité nous fixerons à $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Question 23.1 : Enumération

Pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ énumérer tous les arbres binaires de recherche possibles.

Soit c_n le nombre d'arbres binaires de recherche sur les étiquettes $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Question 23.2 : Equation de récurrence

Montrer que les c_n vérifient l'équation de récurrence

$$c_0 = c_1 = 1;$$
$$c_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k}.$$

En déduire la valeur de c_4.

On suppose l'ABR construit et on effectue uniquement des recherches d'éléments. On note f_i le nombre de fois que l'élément recherché portant l'étiquette i est recherché. Le coût $\overline{C}$ de l'algorithme correspond à la profondeur des étiquettes pondérées par les f_i

$$\overline{C}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_i.profondeur(i).$$

L'objectif est alors de trouver un ABR optimal qui minimise $\overline{C}$.

Question 23.3 : Exemple d'arbre optimal

Pour $n = 4$ et $f_1 = 1,\ f_2 = 9,\ f_3 = 6,\ f_4 = 4$, donner un ABR optimal.

Pour $i \leqslant j$ n note $t[i, j]$ le coût de l'arbre optimal pour les étiquettes $i, \cdots, j$ affectées de la pondération $f_i, \cdots, f_j$.

Question 23.4 : Equation d'optimalité

Montrer que pour $i \leqslant j$

$$t[i, j] = \max_{i \leqslant k \leqslant j} \{t[i, k-1] + f_k + t[k+1, j] + \sum_{l=i}^{k-1} f_l + \sum_{l=k+1}^{j} f_l\},$$

avec comme convention $t[i, i-1] = 0$.

Question 23.5 : Algorithme de calcul

Ecrire l'algorithme de calcul des $t[i, j]$. Calculer l'ordre de grandeur du coût de cet algorithme.

Question 23.6 : Arbre optimal

A partir de cette matrice écrire l'algorithme de construction d'un arbre binaire de recherche optimal.

24 Matrice *(Examen de juin 2007)*

On rappelle qu'une matrice d'éléments de taille $n \times n$ est un ensemble de n^2 éléments associés à une position dans un tableau à 2 dimensions d'éléments. Pour simplifier l'écriture dans l'exercice on supposera que les éléments sont des entiers. On se donne également une opération binaire sur les éléments notée $+$.

Question 24.1 : Type matrice

Proposer, en C, une implémentation du type matrice à l'aide d'un tableau d'éléments, on précisera la manière d'accéder à un élément en position (ligne i, colonne j). On supposera que les indices de ligne et de colonne vont de 0 à $n-1$ et que n est fixé au préalable.

Question 24.2 : Somme de matrices

Ecrire l'algorithme qui réalise la somme de 2 matrices (éléments par élément). Calculer, en fonction de n, le coût de cet algorithme en nombre de sommes d'éléments.

Dans le cas où la matrice est creuse, c'est à dire contient un grand nombre d'éléments nuls, on stocke la matrice sous la forme d'un ensemble de triplets $(valeur, ligne, colonne)$. Par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est représentée par $\{(1,0,1),(2,0,2),(1,1,0),(2,2,4),(1,3,1),(1,3,2),(1,4,1)\}$.

Question 24.3 : Changement de représentation

Ecrire le type correspondant à la nouvelle représentation d'une matrice. Quelles sont les contraintes vérifiées par ce type ? Ecrire l'algorithme qui permet le passage d'une représentation de matrice pleine à sa représentation creuse.

Question 24.4 : Somme de matrices creuses

Etant données 2 matrices A et B de même dimension n et de nombre d'éléments non nuls respectifs m et m', écrire l'algorithme qui réalise la somme de ces deux matrices au format creux.

Question 24.5 : Coût de la somme

Calculer le coût au mieux et au pire de cet algorithme et comparer avec le résultat obtenu en question 1.2).

25 B-arbre *(Examen de décembre 2006 et juin 2007)*

On rappelle qu'un B-arbre est un arbre enraciné vérifiant les propriétés suivantes :

1. Chaque nœud x contient un nombre $n[x]$ de clés portées par le nœud x et une liste ordonnée $n[x]$ de clés $cle_1(x) \leqslant \cdots \leqslant cle_{n(x)}(x)$;
2. Si le nœud interne x contient $n[x]$ clés, il contient également $n[x]+1$ pointeurs vers des B-arbres, $B_0(x), \cdots, B_{n(x)}(x)$, toute clé c du sous-arbre $B_i(x)$ vérifie $cle_{i-1}(x) \leqslant c \leqslant cle_i(x)$;
3. Toutes les feuilles sont à la même profondeur, qui est égale à h hauteur de l'arbre ;
4. Pour un degré $d \geqslant 2$ (degré minimum) donné du B-arbre, tout nœud autre que la racine contient au moins $d-1$ clés. Tout nœud interne contient donc au moins d fils. Si l'arbre n'est pas vide, la racine contient au moins une clé.
5. Tout nœud peut contenir au plus $2d-1$ clés. Donc tout nœud interne contient au plus $2d$ fils.

Question 25.1 : Nombre d'étiquettes : hauteur $h = 0, 1$ ou 2

Dans cette question le degré minimal du B-arbre est fixé à $d = 2$. Donner le nombre minimal et maximal d'étiquettes portées par un B-arbre de hauteur $0, 1$ ou 2. On donnera un exemple de chaque arbre pour $h = 0$ et $h = 1$.

Question 25.2 : Nombre maximal d'étiquettes

Calculer le nombre maximal d'étiquettes portées par un B-arbre de degré d et de hauteur h.

Question 25.3 : Nombre minimal d'étiquettes

Calculer le nombre minimal d'étiquettes portées par un B-arbre de degré d et de hauteur h.

Question 25.4 : Recherche

En déduire que la recherche d'une clé dans un B-arbre de degré d portant n étiquettes se fait en au pire $\mathcal{O}(\log n)$ comparaisons de clés.

26 Tous en rang *(Examen de juin 2007)*

On considère un tableau de n objets d'objets. Chaque objet dispose d'une clé (unique) et l'espace des clés est totalement ordonné et on veut implémenter une primitive $rang$ qui prend en argument un tableau T de n objets, un indice $i \in \{0 \cdots n-1\}$ et qui renvoie l'objet dont la clé est la i-ème dans l'ordre des clés des objets du tableau.

Question 26.1 : Tri du tableau

Ecrire l'algorithme de tri par insertion du tableau d'objets. Quel est le coût de cet algorithme en nombre d'échanges d'objets ? Quel est le coût de la primitive de recherche de l'élément de rang i ?
Quels avantages et désavantages voyez-vous à cette implémentation ?

Question 26.2 : Tri par segmentation

Ecrire l'algorithme de tri par segmentation (Quicksort). Quel est le coût au pire de cet algorithme ? Quel est son coût moyen ? (énoncer le résultat, ne pas le redémontrer)

Question 26.3 : Recherche du rang i

Modifier l'algorithme de tri par segmentation pour obtenir directement l'élément de rang i.

Question 26.4 : Coût de la recherche

Quel est le coût moyen de cet algorithme ? (on pourra dessiner l'arbre des appels associés)
Quels avantages et désavantages voyez-vous à cette implémentation ?

27 Tous en rang (autre version) *(Examen de décembre 2006)*

On souhaite construire une structure de donnée sur un ensemble dynamique d'objets. Chaque objet dispose d'une clé (unique) et l'espace des clés est totalement ordonné. En plus des primitives classiques de création de la structure vide, de l'insertion, de la suppression et du test à vide, on veut implémenter une primitive qui recherche le $i^{\text{ième}}$ objet dans l'ordre des clés.

Question 27.1 : Tableau trié

On utilise un tableau trié dans l'ordre des clés et tassé à gauche (sans trous). Calculer le coût maximum en mouvements d'éléments du tableau associé aux opérations d'insertion et de suppression. Quel est le coût de la primitive de recherche de l'élément de rang i ?

Question 27.2 : Arbre binaire de recherche

On utilise un arbre binaire de recherche. On suppose que les objets ont été insérés dans l'arbre selon un ordre arbitraire (aléatoire et uniforme). Donner sans le démontrer, le coût moyen en nombre de comparaisons de clés associé aux opérations d'insertion et de suppression.

Proposer un algorithme basé sur le parcours infixé permettant d'obtenir l'élément de rang i. On présentera d'abord cet algorithme sous forme itérative. On pourra utiliser une structure de donnée auxiliaire en précisant sa spécification. Donner ensuite cet algorithme sous forme récursive.

Question 27.3 : Arbre binaire de recherche enrichi

On enrichit la structure de donnée de l'arbre binaire de recherche en ajoutant à chaque nœud x la $taille$ du sous-arbre défini par ce nœud. La fonction taille se calcule donc récursivement par

$$taille(x) = 1 + taille(gauche(x)) + taille(droit(x)),$$

avec la taille d'un arbre vide égale à 0.

Proposer un nouvel algorithme de recherche de l'élément de rang i et calculer son coût moyen.

Question 27.4 : Arbre binaire de recherche enrichi (suite)

Modifier l'opération d'insertion dans l'arbre binaire de recherche pour maintenir cohérentes les valeurs de $taille$ associées à chaque nœud. Quel est le surcoût associé au maintien des valeurs de $taille$?

Dire rapidement comment est modifiée l'opération de suppression.

Faire un commentaire sur l'apport de l'enrichissement de la structure sur les coûts associés à la structure de donnée.

28 Ensemble *(Examen de décembre 2006)*

On considère un ensemble $\mathcal{E}$ d'objets distincts. Chaque objet porte un identificateur unique (chaîne de caractères).

Question 28.1 : Structure de donnée

Proposer une structure de donnée permettant de représenter un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$.

Question 28.2 : Test d'égalité

Etant donné $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-ensembles de $\mathcal{E}$. Proposer un algorithme efficace qui teste l'égalité de ces sous-ensembles. On justifiera l'efficacité de l'algorithme.

Question 28.3 : Analyse

Commenter votre choix de structure de donnée en prenant en compte le coût des opérations d'ajout ou de suppression d'un objet d'un sous-ensemble.

29 Hachage *(Examen de décembre 2006)*

Question 29.1 :

Montrer comment on réalise l'insertion des clés (entiers) `5, 28, 19, 15, 20, 33, 12, 17, 10` dans une table de hachage où les collisions sont résolues par liste chaînée et l'insertion se fait en fin de liste. On suppose que la table est de taille 9 et que la fonction de hachage est $h(k) = k \mod 9$. Quel est coût associé à une insertion ?

Question 29.2 :

On souhaite maintenant que les éléments chaînés soient chaînés dans l'ordre croissant de leur clé. Modifier les algorithmes d'insertion et de suppression dans la table.

Question 29.3 :

Comment les coûts moyens de recherche, d'insertion et suppression sont-ils modifiés ? Commenter votre résultat.

30 Mariages *(Examen de décembre 2006)*

On considère deux listes L_1 et L_2 d'éléments colorés. On veut construire une liste de couples d'éléments le premier dans L_1 le deuxième dans L_2 et possédant la même couleur (un élément d'une liste se retrouvera dans au plus un couple). Par exemple, pour les listes :

$$L_1 = [(a, rouge), (b, rouge), (c, vert), (d, bleu), (e, vert), (f, rouge), (g, vert), (h, vert), (i, jaune), (j, bleu)]$$

$$L_2 = [(A, vert), (B, rouge), (C, jaune), (D, jaune), (E, rose), (F, rouge), (G, bleu), (H, vert)]$$

Une solution maximale possible est

$$L_3 = [((f, B), rouge), ((i, D), jaune), ((c, H), vert), ((e, A), vert), ((a, F), rouge), ((d, G), bleu)]$$

Les listes de célibataires restants sont

$$L'_1 = [(b, rouge), (h, vert), (j, bleu)] \text{ et } L'_2 = [(C, jaune), (E, rose)]$$

La liste L_3 est maximale au sens qu'il n'existe plus de mariages possibles. On admet les propriétés suivantes :
- il peut exister plusieurs solutions maximales ;
- toute solution maximale a le même nombre d'éléments.

Question 30.1 :

Ecrire un algorithme qui réalise un mariage des listes (un parmi tous ceux qui sont possibles).

On note n_1 et n_2 la taille des listes L_1 et L_2. n_c est le nombre de couleurs, à priori inconnu.

Question 30.2 :

Calculer le coût de votre algorithme et proposer un cas "pire".

Question 30.3 :

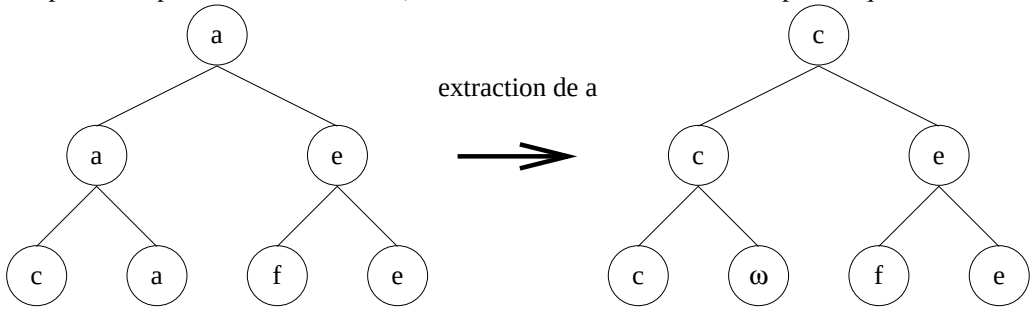
En supposant que le nombre de couleurs n_c est égal à 3 et en utilisant une structure de tableau, proposer un algorithme qui résolve ce problème en temps linéaire (nombre de comparaisons), c'est à dire

$$\text{Coût } \leqslant \alpha(n_1 + n_2),$$

où α est un coefficient que l'on précisera.

31 Tri par arbre *(Examen de décembre 2006)*

Le tri par sélection consiste à extraire un élément minimum de l'ensemble des éléments à trier puis à recommencer la procédure avec les éléments restants. On considère une variante de ce tri qui utilise une structure auxiliaire d'arbre binaire étiqueté complet. Par exemple le tableau `[c a f e]` sera représenté par l'arbre suivant (l'ordre considéré est l'ordre alphabétique sur les lettres) :



Les feuilles sont étiquetées par les éléments du tableau, l'étiquette d'un nœud interne de l'arbre est égale au minimum de l'étiquette de ses deux fils. Après extraction du minimum on remplace dans l'arbre l'étiquette de la feuille du minimum par un symbole, ici ω, qui est plus grand que toutes les éléments à trier et on actualise l'arbre. Pour simplifier on suppose que le nombre d'éléments à trier est $n = 2^k$.

Question 31.1 :

Donner la suite des arbres obtenus lors de l'exécution de cet algorithme sur le tableau `[ l a n f e u s t]`.

On utilise la structure de donnée "tas" pour représenter cet arbre. On rappelle que dans un tas, l'arbre est représenté par un tableau, la racine est en première position du tableau et les fils du nœud i sont en position $2i$ et $2i + 1$.

Question 31.2 :

Donner le tas initial pour l'exemple de la question précédente.

Question 31.3 :

Ecrire l'algorithme d'initialisation du tas pour un tableau donné de taille $n = 2^k$ et calculer son coût en nombre d'affectations dans le tableau. Ecrire l'algorithme d'actualisation du tas lors de l'extraction du minimum et calculer son coût en nombre d'affectations dans le tableau.

Question 31.4 :

Combien de fois au total compare-t-on ω et ω en triant tous les éléments ? Calculer le coût de cet algorithme de tri et commenter ce résultat. Comment modifier cet algorithme pour traiter les cas où n n'est pas une puissance de 2.

32 Suites 2-3 triées *(Examen de décembre 2005)*

Au cours de l'exécution d'algorithmes de tri tels que le *shell-sort*, on génère des tableaux partiellement triés. On dit qu'un tableau est 2-3-trié s'il contient tous les éléments initiaux et si chaque élément est à sa place ou dans une place voisine. Le i-ième élément dans un tableau T de taille n est soit dans la case $T[i-1]$, $T[i]$ ou $T[i+1]$ excepté aux bords (le plus petit élément est dans $T[1]$ ou $T[2]$ le plus grand dans $T[n-1]$ ou $T[n]$). Par exemple, la suite suivante est 2-3 triée :

Position	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Elément	2	1	4	3	5	6	8	7	9

Question 32.1 : Enumération de tableaux 2-3-triés

Dans les cas $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ et $n = 5$, donner tous les tableaux 2-3 triés possibles.

Question 32.2 : Comptage

Donner, en la justifiant, l'équation de récurrence vérifiée par $c(n)$ nombre de tableaux 2-3-triés de taille n. (Bonus : calculer $c(n)$ et commenter votre résultat.)

Question 32.3 : Algorithme de réarrangement

Ecrire un algorithme qui prend en argument un tableau 2-3-trié de taille n et réarrange tous ses éléments par ordre croissant. Prouver votre algorithme et calculer son coût.

33 Changement de racine *(Examen de décembre 2005)*

On considère un arbre binaire de recherche de racine r dont toutes les étiquettes sont différentes. On notera, pour un nœud x, $G(x)$ (respectivement $D(x)$) le sous-arbre gauche (respectivement droit) de x.

On souhaite transformer l'ABR de manière à ce qu'un nœud a donné soit racine du nouvel ABR. Cela revient à construire deux arbres binaires de recherche G_a et D_a. Les nœuds de G_a ont une étiquette inférieure à l'étiquette de a et ceux de D_a une étiquette supérieure.

Question 33.1 :

Proposer une solution lorsque a est la racine.

On suppose que l'étiquette du nœud a est inférieure à l'étiquette de la racine r.

Question 33.2 :

Montrer que les nœuds de G_a sont des nœuds contenus dans $G(r)$.
Montrer que les nœuds de $D(r)$ et r sont des nœuds contenus dans D_a.
En déduire une construction récursive de l'ensembleD_a.

Question 33.3 :

Si l'étiquette de r est plus petite que l'étiquette de a proposer une construction analogue de l'arbre G_a.

Question 33.4 :

Ecrire l'algorithme qui, à partir d'un arbre binaire de recherche de racine r et d'un nœud a renvoie un arbre binaire de recherche de racine a contenant tous les nœuds de l'arbre initial.

Question 33.5 :

Calculer le coût de votre algorithme et donner un exemple de cas "pire".

Question 33.6 :

Donner un exemple d'arbre de binaire de recherche et donner la trace d'exécution de votre algorithme sur celui-ci.

34 Arbres binaires *(Examen de juin 2005)*

On note n le nombre de nœuds d'un arbre binaire, f son nombre de feuilles et h sa hauteur. On rappelle que la hauteur d'un arbre réduit à 1 nœudest 0 et que les feuilles sont les nœuds de l'arbre dont le fils gauche et le fils droit sont vides.

Question 34.1 :

Quelle est la hauteur maximale d'un arbre de n nœuds ?

Question 34.2 :

Quel est le nombre maximum de feuilles d'un arbre de hauteur h ?

Question 34.3 :

Quel est le nombre maximum de nœuds d'un arbre de hauteur h ?

Question 34.4 :

Quelle est la hauteur minimale d'un arbre de n nœuds ?

Question 34.5 :

Montrer que le nombre de branches vides (nombre de fils gauches et de fils droits vides) d'un arbre à n nœuds est égal à $n + 1$.

Question 34.6 :

Montrer que le nombre de feuilles d'un arbre à n nœuds est inférieur ou égal à $\frac{n+1}{2}$ et que l'on a égalité si et seulement si chaque nœudde l'arbre est une feuille ou bien a 2 fils.

35 File à double entrée *(Examen de juin 2005)*

On veut construire une structure de donnée permettant la gestion d'une file à double entrée. Les opérations d'insertion et de retrait peuvent se faire en tête ou en queue de la file.

Question 35.1 :

Proposer une structure de donnée `FDE` (écrite en C) implémentant ce type de file dans un tableau de taille fixe `N`.

Question 35.2 :

Ecrire une implémentation de la fonction `Test_File_Vide(f)`.

Question 35.3 :

Ecrire une implémentation des procédures `Inserer_en_tete(e,f)`, `Inserer_en_queue(e,f)`, `Retirer_en_tete(f)` et `Retirer_en_queue(f)`.

36 Deuxième maximum *(Examen de juin 2005)*

On suppose donné un tableau d'éléments comparables par une relation d'ordre $\leqslant$ et tous distincts. On note n la taille de ce tableau et on dispose uniquement d'un opérateur de comparaison entre 2 éléments.

Question 36.1 :

Ecrire un algorithme de recherche de l'indice dans le tableau de l'élément maximal pour la relation$\leqslant$. Calculer son coût (en nombre de comparaisons d'éléments).

Question 36.2 :

Ecrire un algorithme de recherche de l'indice dans le tableau du deuxième élément maximal (plus grand élément plus petit que l'élément maximal) pour la relation$\leqslant$. Calculer son coût (en nombre de comparaisons d'éléments).

Question 36.3 :

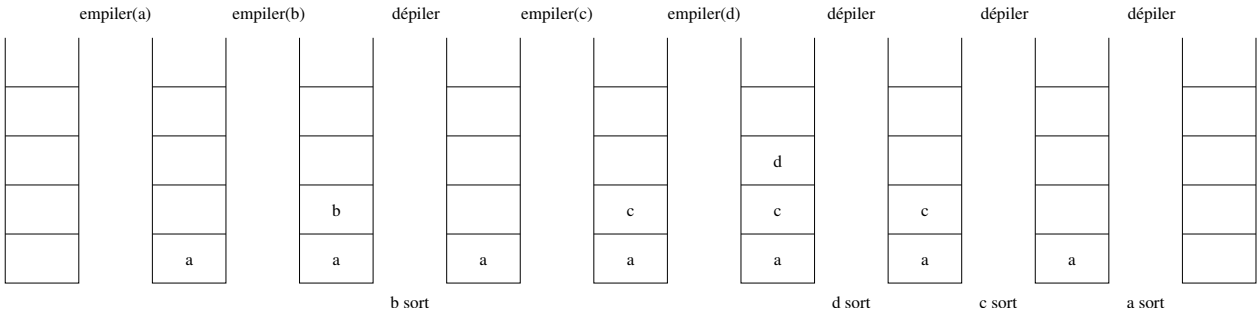
En utilisant le principe des tournois (coupe de France, Rolland Garros,...) proposer un algorithme de recherche de l'élément maximal. Il n'est pas nécessaire de formaliser l'algorithme, une explication appuyée sur un schéma clair est suffisante.

Question 36.4 :

Proposer un deuxième algorithme de recherche du deuxième plus grand élément et calculer son coût en nombre de comparaisons.

37 Sortie de pile *(Examen de décembre 2004)*

On s'intéresse à l'ordre de sortie d'éléments d'une pile en fonction de leur ordre d'insertion. Par exemple, si l'on insère $n = 4$ éléments a, b, c, d dans cet ordre dans une pile, ils peuvent en ressortir dans l'ordre b, d, c, a. En effet, on a effectué successivement empiler(a), empiler(b), dépiler, empiler(c), empiler(d), dépiler, dépiler, dépiler. La contrainte est qu'un élément ne peut sortir de la pile avant d'avoir été empilé.



On note $c(n)$ le nombre d'ordres de sortie de la pile possibles, l'ordre d'entrée étant fixé.

Question 37.1 :

Dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$ donner tous les ordres de sortie possibles.

Question 37.2 : *bonus*

Donner en la justifiant l'équation de récurrence vérifiée par les $c(n)$. Commenter votre résultat.

38 Parcours *(Examen de décembre 2004)*

On rappelle que dans un arbre la racine est au niveau 0, les fils de la racine sont au niveau 1, etc...

Question 38.1 :

Dans un arbre binaire, combien de feuilles peut-on avoir au maximum au niveau i.

Question 38.2 :

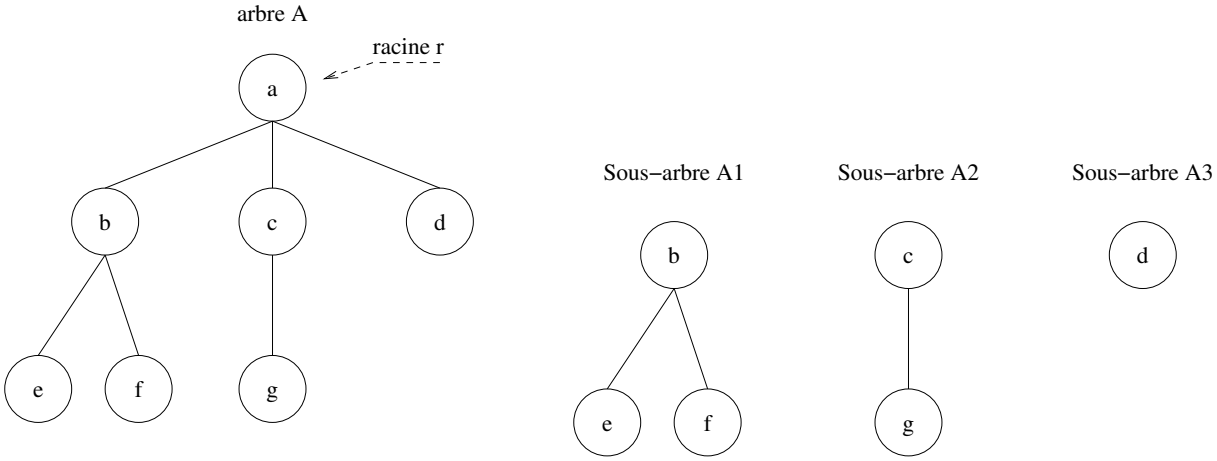
Proposer un algorithme qui prend en argument un arbre binaire A et un niveau i et renvoie le nombre de feuilles au niveau i.

Question 38.3 :

Calculer le coût de votre algorithme en nombre de nœuds examinés. Commenter votre résultat.

39 Faire tourner les arbres *(Examen de décembre 2004)*

On considère un arbre étiqueté défini récursivement : un arbre non vide est constitué d'une racine r et d'une liste d'arbres (les sous-arbres de la racine r). L'ordre des sous-arbres fils de la racine est important, on distingue le premier fils, le deuxième, etc.



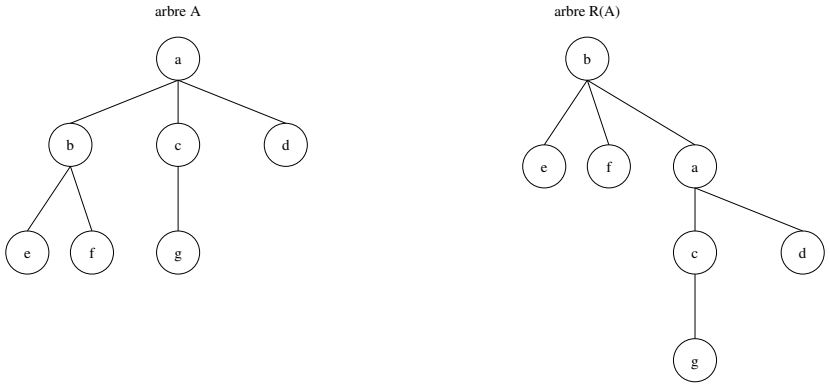
Dans l'exemple la racine a possède 3 fils où sont attachés les sous-arbres A1, A2 et A3.

Question 39.1 :

Proposer une structure de donnée (en C) pour ce type d'arbres.

La transformation R de l'arbre $\mathcal{A}$ opère de la manière suivante :
- soit $\mathcal{A}$ est réduit à un seul nœud, alors $R(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$;
- soit $\mathcal{A}$ n'est pas réduit à un nœud, dans ce cas $\mathcal{A}$ est de la forme $\mathcal{A} = (r, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_k)$ avec $\mathcal{A}_1$ non vide de la forme $\mathcal{A}_1 = (s, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_k)$. Alors $R(\mathcal{A}) = (s, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \cdots, \mathcal{B}_k, (r, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \cdots, \mathcal{A}_k))$.

Pour l'exemple ci-dessus on obtient :



Question 39.2 :

Pour l'exemple donné appliquer la transformation R successivement jusqu'à obtenir l'arbre initial. Combien a-t-il fallu d'itérations ? Donner la suite des racines des arbres obtenue successivement.

Question 39.3 :

Ecrire en C la procédure associée à la transformation R.

On note $\mathcal{A}^1 = R(\mathcal{A})$ et de manière générale $\mathcal{A}^i = R(\mathcal{A}^{i-1})$. Soit $m(\mathcal{A})$ le nombre minimal d'itérations nécessaires pour retomber sur $\mathcal{A}$

$$m(\mathcal{A}) = \min\{i,\ i \geqslant 1 \ et\ \mathcal{A}^i = \mathcal{A}\}.$$

Question 39.4 :

Montrer que tous les nœuds de l'arbre $\mathcal{A}$ sont racine de l'un des arbres $\mathcal{A}^i$. Donner la valeur de $m(\mathcal{A})$ si l'arbre $\mathcal{A}$ possède n nœuds , on pourra raisonner d'abord sur le nombre d'arêtes.

Question 39.5 : bonus

Donner un critère d'arrêt de l'itération lorsque le nombre de nœuds de $\mathcal{A}$ et $m(\mathcal{A})$ ne sont pas connus. Ecrire en C la procédure qui liste les racines de arbres $\mathcal{A}^i$.

Question 39.6 :

Comparer cet algorithme de parcours d'arbre avec les algorithmes de parcours vus en TD (parcours en profondeur d'abord et parcours en largeur d'abord).

40 Compter les tas *(Examen de décembre 2003)*

Dans cette exercice on va étudier des tas construits par la procédure d'insertion d'éléments (procédure vue en TD). On note n la taille du tas. Sans perte de généralité, on supposera que les clés des n éléments du tas sont $\{1, \cdots, n\}$. On notera t_n le nombre de tas différents de taille n avec les clés $\{1, \cdots, n\}$.

Question 40.1 :

Dans le cas $n = 3$, on a $t_3 = 2$. Quels sont les 2 tas T_1 et T_2 possibles ? En supposant équiprobable l'ordre d'insertion des éléments dans le tas, calculer la proportion de tas T_1 construits.

Question 40.2 :

Quels sont les tas possibles dans le cas $n = 5$? Donner pour chaque tas un ordre d'insertion particulier des éléments qui produise ce tas.

Question 40.3 :

Pour un tas de taille n, calculer sa hauteur puis calculer la taille du sous-arbre gauche et du sous-arbre droit. *Indication : regarder les cas* $n = 2^k - 1$, $n = 2^k$.

Question 40.4 : *bonus*

Donner une équation de récurrence sur les nombres t_n pour $n = 2^k - 1$.

41 Collection *(Examen de décembre 2003)*

On considère un ensemble $\mathcal{O} = \{o_1, \cdots, o_n\}$ d'objets. On appelle collection $\mathcal{C}$ un groupe d'objets dans lequel un objet peut être représenté plusieurs fois, par exemple : des timbres, des pièces de monnaie, les mots d'un texte, les résultats de tirages au loto... Une spécification de la sorte collection est présentée figure 1.

```
#ifndef __COLLECTION__          ANNEXE : SPECIFICATION DE LA SORTE COLLECTION
#define __COLLECTION__

typedef char element;

struct noeud_collection { ......... QUESTION 2.1 .....................
};
typedef struct noeud_collection *collection;

/*
   collection_vide
   description : construit une collection vide
   parametres : aucun
   valeur de retour : une collection vide
   effets de bord : aucun
*/
collection collection_vide();

/*
   inserer_dans_collection
   description : ajoute une donnee a la collection
   parametres : donnee a ajouter, collection a laquelle on ajoute
   valeur de retour : la collection avec la donnee en plus
   effets de bord : la collection passee en parametre n'est plus utilisable
                    (sinon perte de coherence du chainage)
*/
collection inserer_dans_collection(element donnee, collection c);

/*
   appartient_a_collection
   description : retourne 1 si l'element fournit appartient a la collection
                 et 0 sinon
   parametres : element, collection
   valeur de retour : 0 ou 1
   effets de bord : aucun
*/
int appartient_a_collection(element donnee, collection c);

/*
   supprimer_de_collection
   description : supprime un element d'une collection
   parametres : element, collection
   valeur de retour : ..................... QUESTION 2.2
   effets de bord :   ..................... QUESTION 2.2
*/
collection supprimer_de_collection(element donnee, collection c);

/*
   est_collection_vide
   description : retourne 1 si la collection passee en parametre est vide
   parametres : collection
   valeur de retour : 1 si la collection passee en parametre est vide, 0 sinon
   effets de bord : aucun
*/
int est_collection_vide(collection c);

/*
   est_inclus_dans_collection
   description : retourne 1 si la collection c1 est incluse dans c2
   parametres : 2 collections
   valeur de retour : 1 si c1 est incluse dans c2, 0 sinon
   effets de bord : aucun
*/
int est_inclus_dans_collection(collection c1, collection c2);

#endif
```

FIGURE 1 – Spécification de “Collection”

On propose deux structures de données pour représenter une telle collection (figure 2) :

Structure 1 Une liste simplement chaînée des objets ;

Structure 2 Une liste de couples *(objet,entier strictement positif)* où un objet ne sera cité qu'une seule fois dans la liste et l'entier associé sera le nombre d'occurrences de l'objet dans la collection.

Une spécification de la sorte collection est donnée en annexe.

Question 41.1 :

Écrire une implémentation des deux structures de données.

Question 41.2 :

Écrire la spécification de l'opérateur `supprimer_de_collection`. Puis, pour chacune des deux structures de données, proposer un algorithme et son implémentation.

Question 41.3 :

Pour les deux implémentations proposées ci-dessus, évaluer le coût en nombre de comparaisons entre des éléments. Donner des exemples réalisant le coût minimum et des exemples pour le coût maximum.

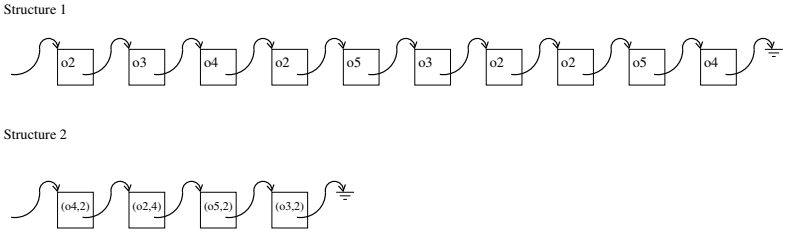


FIGURE 2 – Représentations de la collection $C = \{o_2, o_3, o_4, o_2, o_5, o_3, o_2, o_2, o_5, o_4\}$

Question 41.4 :

Pour la structure de données 2, proposer un algorithme et son implémentation de l'opérateur `est_inclus_dans_collection`.

Question 41.5 :

Proposer des principes de solutions pour implémenter `est_inclus_dans_collection` avec la structure 1, premièrement sans modifier la structure, deuxièmement en enrichissant la structure.

42 Arbres binaires de recherche *(Examen de décembre 2003)*

Dans cet exercice on considérera des arbres binaires de recherche dont les étiquettes portées par les nœuds sont toutes différentes. On cherchera à lister $\mathcal{A}$ ensemble des nœuds dont l'étiquette est supérieure à une valeur a. On notera par N_a le nombre de nœuds dont l'étiquette est supérieure ou égale à a et h la hauteur de l'arbre.

Question 42.1 :

Modifier le parcours infixé vu en cours de manière à lister tous les nœuds de $\mathcal{A}$ avec un nombre de nœuds examinés majoré par $N_a + (h + 1)$. Justifier votre réponse.

Question 42.2 :

Sur la figure 3, marquer les sommets examinés par l'algorithme pour les valeurs $a = 24$, $a = 65$, $a = 90$ et $a = 105$.

FEUILLE A ANNOTER ET A METTRE DANS LA COPIE No :_____

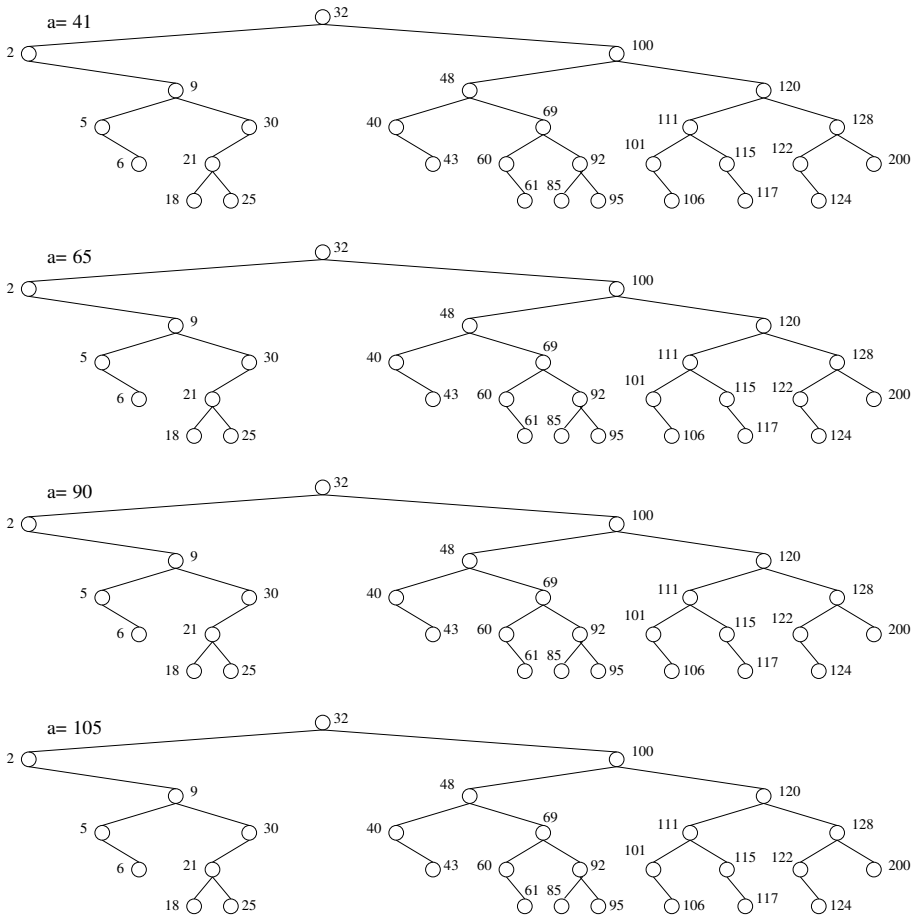


FIGURE 3 – Arbre binaire de recherche

Question 42.3 :

Modifier l'algorithme de manière à fournir la liste des nœuds dont l'étiquette est supérieure ou égale à a et inférieure strictement à b. Majorer la complexité de cet algorithme.

43 Bulles *(Quick octobre 2007)*

On se donne un tableau A de taille n d'éléments. L'ensemble des éléments est muni d'un ordre total et on suppose que tous les éléments du tableau sont distincts. Soit l'algorithme suivant :

pour i=1 à n **faire**

```
    pour j=n à i+1 pas -1  faire
      si A[j]<A[j-1] alors
        Permute(A[j-1],A[j])
      fin si
    fin pour
  fin pour
```

Question 43.1 : Coût de l'algorithme

Calculer les coûts, au pire et au mieux, de cet algorithme en nombre d'opérations de permutations d'éléments dans le tableau. On donnera également les ordres grandeur.

Question 43.2 : Coût moyen de l'algorithme (question bonus)

Calculer le coût moyen de cet algorithme en supposant que les entrées sont modélisées par une permutation de $\{1, \cdots, n\}$ et que toutes les permutations ont la même probabilité.

44 Fibonnacci *(Quick octobre 2007)*

Les nombres de Fibonacci $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis par la relation de récurrence suivante :

$F_0 = F_1 = 1$;

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

On souhaite calculer le nombre de Fibonacci d'ordre n. Pour cela on utilise le programme récursif suivant :

```
Fibo_recursif(entier n)
si n=0 ou n=1 alors
  retourner 1
sinon
  retourner Fibo_recursif(n-1) + Fibo_recursif(n-2)
fin si
```

On note $C(n)$ le coût de l'algorithme en nombre d'additions.

Question 44.1 : Encadrement de $C(n)$

Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par $C(n)$? Montrer que $C(n)$ est croissante et en déduire que

$$2^{\frac{n}{2}} \leqslant C(n) \leqslant 2^n.$$

Question 44.2 : Algorithme itératif

Ecrire un algorithme itératif qui calcule $F(n)$ et donner son coût en nombre d'additions.

Question 44.3 : Diviser pour régner

En remarquant que, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix},$$

en déduire que F_n peut être calculé en un temps $\mathcal{O}(\log n)$.

45 Fusion de liste *(Quick octobre 2007)*

On considère une implémentation de plusieurs listes au sein d'un même tableau par chaînage et on veut implémenter l'opérateur de fusion de liste dont le prototype est :

```
/*
   fusion
   description : retourne une liste qui est la fusion de 2 listes
   parametres : deux listes gérées par chaînage dans un même tableau
   valeur de retour : une liste chaînée dans le même tableau
   effets de bord : les deux listes données en paramètre ne sont plus utilisables
*/
list fusion(liste l1, liste l2);
```

Question 45.1 :

On suppose que la représentation des listes se fait par chaînage **simple** dans le tableau. Ecrire l'algorithme de fusion et calculer son coût.

On suppose que la représentation des listes se fait par chaînage double dans le tableau.

Question 45.2 :

On suppose que la représentation des listes se fait par chaînage **double** dans le tableau. Ecrire l'algorithme de fusion et calculer son coût.

Question 45.3 :

En quoi un chaînage circulaire (simple ou double) permettrait d'améliorer le coût de ces algorithmes

46 Relations antisymétriques *(Quick octobre 2005)*

Question 46.1 :

Soit X un ensemble de n éléments. Donner, en le justifiant, le nombre de relations antisymétriques possibles sur X.

47 Tri à 3 couleurs *(Quick octobre 2005)*

Question 47.1 : Réorganisation d'éléments

On considère un tableau de n éléments. Chaque élément est de couleur rouge, jaune ou bleue. On souhaite réorganiser le tableau de manière à ce que les éléments de couleur rouge soient en tête du tableau suivis par les éléments de couleur jaune et enfin les éléments bleus. On dispose uniquement de l'opérateur *permute(i,j)* qui échange le contenu des cases i et j du tableau.

En vous inspirant de l'algorithme de tri par insertion, écrire un algorithme qui réalise cette réorganisation. Justifier à l'aide de dessins cet algorithme et évaluer son coût en nombre d'appels à l'opérateur *permute*, donner son ordre de grandeur.

48 File en tableau *(Quick octobre 2005)*

On implémente une file par un tableau circulaire d'éléments avec la structure de donnée et du constructeur suivants :

```
typedef struct {                    /*
element *donnee;                       allouer_file
int taille;     /* taille de la file */description : construit une file vide
int tete;       /* indice de la tête deparametres : taille maximale de la file
             la file dans le tableau*/valeur de retour : une file vide
int longueur;                          effets de bord : aucun
      /* nb d'éléments dans la file */
} file;                                file file_vide(int taille);
/*                                     /*
   est_file_invalide                      liberer_file
   description : retourne 1 si la      description : libere une file precedemment
                        file est invalide            allouee par alloue_vecteur
   parametres : la file                   parametres : la file
   valeur de retour : 1 (invalide) ou 0valeur de retour : aucune
   effets de bord : libere de la memoireeffets de bord : libere de la memoire
*/                                     */
int est_file_invalide(file f);         void liberer_file(file v);
```

Question 48.1 :

Ecrire les spécifications, c'est à dire la description, les paramètres, la valeur de retour et les effets de bord, des opérations `enfiler (file f,element e)` et `defiler (file f)`.

Question 48.2 :

Ecrire les procédures correspondant à votre spécification.

49 Eliminer les doublons *(Quick novembre 2005)*

Un objet du type Liste est appelé *liste*. Il représente un ensemble d'*éléments*. Chaque *élément* a une *position* dans la liste.
Ce type utilise un ensemble E pour ses *éléments*, l'ensemble N des entiers (pour les *positions*) et l'ensemble B des booléens.

La liste peut être manipulée à l'aide des opérateurs suivants :

liste_vide :	$\emptyset$	$\rightarrow$	Liste
insérer	Liste x E x N	$\rightarrow$	Liste
premier	Liste	$\rightarrow$	E
suivant	Liste	$\rightarrow$	Liste
est_vide	Liste	$\rightarrow$	B

liste_vide() est une liste de zéro élément.

inserer(l,e,i) insère l'élément e en position i.

premier(l) est l'élément de la liste l qui est en première position.

suivant(l) est la liste l privée de l'élément en première position.

est_vide(l) si et seulement si l a zéro élément.

On désire écrire la primitive Enlever_doublon

Question 49.1 :

A l'aide des opérateurs de base écrire la primitive Enlever_Doublons.

Question 49.2 :

Calculer, pour la primitive Enlever_Doublons, le coût en nombre d'appels des primitives de base et commenter le résultat obtenus.

Question 49.3 :

En quoi une table de hachage pourrait-elle améliorer le coût de cette primitive ?

50 Réservation et conflit *(Quick novembre 2005)*

On considère un mécanisme de gestion de mémoire, celui-ci alloue des plages mémoires aux utilisateurs. Une requête mémoire est donc une plage d'adresses contigües, c'est à dire un intervalle de la forme $r = [a_1, a_2]$. Lors de la réception d'une requête r l'allocateur vérifie d'abord que cette demande n'entre pas en conflit avec les allocations précédemment effectuées, c'est à dire que l'intervalle $[a_1, a_2]$ ne recouvre pas une plage déjà allouée. S'il n'y a pas de conflit, il alloue la mémoire à l'utilisateur et retourne un identificateur id de la plage (ou 0 s'il y a eu conflit). L'utilisateur libère la plage par une requête de type $Libere(id)$ à l'allocateur.

L'allocateur de ressource utilise donc une structure de donnée notée $\mathcal{EI}$ qui contient un ensemble d'intervalles. Il faut remarquer que les intervalles dans cette structure ont deux à deux des intersections vides. Les opérateurs sur cette structure de donnée sont

$Conflit(r)$ qui retourne vrai si l'intervalle r intersecte au moins un intervalle de la structure ;

$Verrouille(r)$ insère l'élément r dans la structure et renvoie un identifiant id ;

$Libere(id)$ supprime la plage d'identifiant id de la structure.

Question 50.1 : Liste d'intervalles

Lorsque la structure $\mathcal{EI}$ est implémentée par une liste d'intervalles donner un algorithme pour la primitive $Conflit(r)$. Calculer le coût de cette primitive en nombre de comparaisons d'intervalles.

On décide pour implémenter $\mathcal{EI}$ d'utiliser une structure d'arbre binaire de recherche dans lequel les nœuds sont étiquettés par des intervalles.

Question 50.2 :

Préciser la propriété vérifiée par les étiquettes dans cette structure de donnée.

Question 50.3 : Exemple

Construire l'arbre obtenu après le traitement successif des requêtes (initialement l'arbre est vide) :

$[21, 25], [40, 41], [63, 71], [24, 30], [45, 60], [6, 10], [70, 72], [1, 3], [32, 36]$

On précisera les plages qui n'auront pas été insérées.

Donner, en expliquant la méthode utilisée, l'arbre binaire de recherche obtenu si on supprime l'intervalle $[40, 41]$ dans l'arbre précédent ?

Question 50.4 : Test de conflit

Ecrire l'algorithme de l'opérateur $Conflit$.

Quel est son coût en nombre de comparaisons d'intervalles ?

51 Comprimons *(Quick novembre 2006)*

On dispose d'un texte codé avec un alphabet $\mathcal{A} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$. Les proportions de ces symboles dans le texte sont données en pourcentage dans le tableau suivant :

Symbole	A	B	C	D	E	F	G	H
Proportion (%)	2	10	4	18	12	16	32	6

Question 51.1 : Code de longueur fixe

Donner la taille du code de longueur fixe nécessaire pour coder cet alphabet. Calculer l'entropie associée à cet alphabet et commenter en une phrase cette valeur.

Question 51.2 : Code de longueur variable

Construire avec l'algorithme de Huffman statique un codage de longueur variable. Donner l'arbre de codage correspondant et le tableau des codes. Calculer la longueur moyenne du code et commenter le résultat en une phrase.

Question 51.3 : Algorithme de décodage (cas général)

Etant donné un arbre de codage binaire, écrire un algorithme de décodage qui prend en argument un texte codé et renvoie le texte décodé. (Les opérateurs de base sur du type arbre de codage sont donnés au verso de cette feuille).

Question 51.4 : Tableau des codes (cas général)

Etant donné un arbre de codage binaire, écrire un algorithme qui construit la table qui associe les codes aux symboles.

Opérateurs sur le type Arbre de codage

```
EstFeuille
paramètres : un Arbre de codage A (donnée)
valeur de retour : un booléen
description : vaut vrai ssi A est réduit à une feuille
effets de bord : aucun

Symbole
paramètres : un Arbre de codage A (donnée)
valeur de retour : un symbole de l'alphabet de départ
description : A doit être réduit à une feuille,
                        renvoie le symbole associé à la feuille
effets de bord : aucun

FDroit
paramètres : un Arbre de codage A (donnée)
valeur de retour : un Arbre de codage
description : A est un arbre non réduit à une feuille,
                        renvoie le fils droit associé à la racine de A
effets de bord : aucun

FGauche
paramètres : un Arbre de codage A (donnée)
valeur de retour : un Arbre de codage
description :  A est un arbre non réduit à une feuille,
                         renvoie le fils gauche associé à la racine de A
effets de bord : aucun
```