Apprentissage d'équilibres de Nash. Dynamique d'un problème d'équilibrage de charges

Olivier Bournez
C.R. INRIA, Nancy.

Grenoble.
7 Février 8.

(travail commun avec D. Barth, O. Boussaton, J. Cohen)

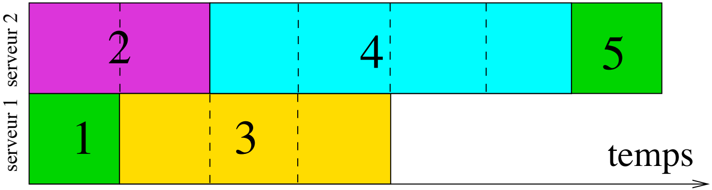
Plan

- Définition du problème
- Quelques résultats sur ce problème
- Apprentissage d'équilibre de Nash
- Une première dynamique (équilibres purs)
- Une version stochastique (équilibres purs)
- Une autre dynamique (équilibre quelconques)
  - Etape 1 : du discret vers le continu
  - Etape 2 : analyse du système continu
  - Etape 3 : prouver la convergence
- Conclusion

Le problème

Exemple : allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches,
- Une affectation $L_2 = 7$, $L_1 = 4$



- Coût (machines identiques) :

tâche	coût
1	4
3	4

tâche	coût
2	7
4	7
5	7

Allocation des tâches.

- m machines (serveurs) ayant des vitesses d'exécution $f_1(.), \ldots, f_m(.)$
- n tâches (joueurs) ayant pour poids $\{w_1, \ldots, w_n\}$
- S_i : ensemble des machines qui peut l'héberger le joueur i (ens. de stratégies)
- Charge L_j d'une machine j $=$ somme des poids des tâches sur le serveur.
- Coût d'une tâche i hébergé par j : $c_i(M) = L_j$ $c_i(M) = f_j(L_j)$

  dans la configuration M, le joueur j choisit d'être placé sur le serveur i.

Allocation des tâches.

- m machines (serveurs) ayant des vitesses d'exécution $f_1(.), \dots, f_m(.)$
- n tâches (joueurs) ayant pour poids $\{w_1, \dots, w_n\}$
- S_i : ensemble des machines qui peut l'héberger le joueur i (ens. de stratégies)
- Charge L_j d'une machine j = somme des poids des tâches sur le serveur.
- Coût d'une tâche i hébergé par j : $c_i(M) = L_j$ $c_i(M) = f_j(L_j)$

  dans la configuration M, le joueur j choisit d'être placé sur le serveur i.

Allocation des tâches.

- m machines (serveurs) ayant des vitesses d'exécution $f_1(.), \ldots, f_m(.)$
- n tâches (joueurs) ayant pour poids $\{w_1, \ldots, w_n\}$
- S_i : ensemble des machines qui peut l'héberger le joueur i (ens. de stratégies)
- Charge L_j d'une machine j $=$ somme des poids des tâches sur le serveur.
- Coût d'une tâche i hébergé par j : $c_i(M) = L_j$ $c_i(M) = f_j(L_j)$

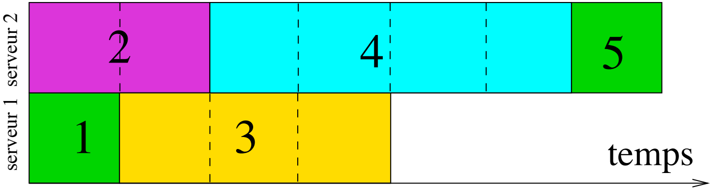
  dans la configuration M, le joueur j choisit d'être placé sur le serveur i.

Quelques cas particuliers

- Cas “Machines Identiques” :
  - $f_j(L) = L$
- Cas “Uniformément reliées” :
  - $f_j(L) = a_j L + b_j$
- Cas “Général” :
  - $f_j(.)$ quelconque

Exemple : allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches,
- Une affectation $L_2 = 7$, $L_1 = 4$



- Coût (machines identiques) :

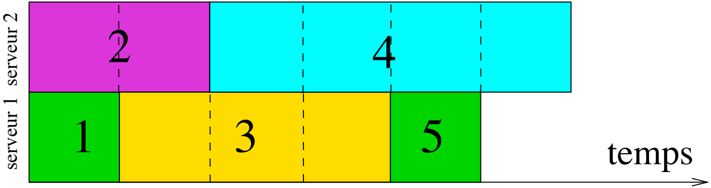
tâche	coût
1	4
3	4

tâche	coût
2	7
4	7
5	7

- Une tâche peut-elle améliorer son coût ? OUI

Exemple : allocation de tâche

- 2 serveurs, 5 tâches,
- Une affectation $L_1 = 5$, $L_1 = 6$



- Coût (machines identiques) :

tâche	coût
1	5
3	5
5	5

tâche	coût
2	6
4	6

- Une tâche peut-elle améliorer son utilité ? NON

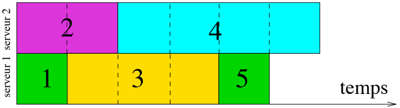
Equilibre de Nash (en stratégies pures) dans ce contexte.

Stratégie pure pour un joueur i : choix d'un serveur j.

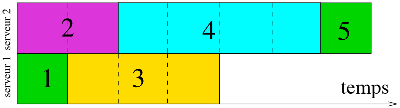
Une affectation de n tâches est un équilibre de Nash si pour toutes les tâches i,

Si i est affecté à la machine j, et
si i peut être affecté à la machine k alors,

$$f_j(L_i) \leq f_k(L_k + w_i)$$



Equilibre de Nash



$\neg$ Equilibre de Nash

Equilibre de Nash (en stratégies mixte) dans ce contexte.

Stratégie mixte pour un joueur i : choix d'une distribution de probabilité q_i sur les serveurs.

Une affectation de n tâches est un équilibre de Nash si pour toutes les tâches i,

Si i est affecté aux machines selon la distribution q_i, et pour tout autre distribution q'_i pour i alors,

$$E_{q_i, q_{-i}}[f(L)] \leq E_{q'_i, q_{-i}}[f(L)]$$

Theorem (Nash 51)

Tout jeu possède un équilibre en stratégies mixtes

Existence d'un équilibre de Nash.

Theorem (Fotakis2002,Even-Dar2003)

Les jeux de cet exposé possèdent toujours un équilibre de Nash en stratégies pures.

Preuve :

1. Soit M une affectation et $\{(f_j(L_j))_j\}$ les tps de réponses.
2. $\overline{v}(M) = \{f_1(L_1), f_2(L_2), \ldots, f_m(L_m)\}$ avec $f_1(L_1) \geq f_2(L_2) \geq \cdots \geq f_m(L_m)$
3. Si la tâche i veut migrer du serveur j vers k, alors on est dans la situation
   - $f_j(L_j) \searrow$ et $f_k(L_k) \nearrow$
   - $j < k$.
   - $\overline{v}(M) > \overline{v}(M')$ avec $M' = M \oplus$ la tâche i est sur le serveur k.

Existence d'un équilibre de Nash.

Theorem (Fotakis2002,Even-Dar2003)

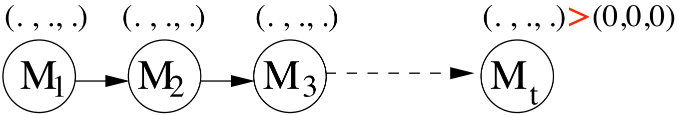
Les jeux de cet exposé possèdent toujours un équilibre de Nash en stratégies pures.

Preuve :

1. Soit M une affectation et $\{(f_j(L_j))_j\}$ les tps de réponses.
2. $\overline{v}(M) = \{f_1(L_1), f_2(L_2), \ldots, f_m(L_m)\}$ avec $f_1(L_1) \geq f_2(L_2) \geq \cdots \geq f_m(L_m)$
3. Si la tâche i veut migrer du serveur j vers k, alors on est dans la situation
   - $f_j(L_j) \searrow$ et $f_k(L_k) \nearrow$
   - $j < k$.
   - $\overline{v}(M) > \overline{v}(M')$ avec $M' = M \oplus$ la tâche i est sur le serveur k.

Suite la preuve de l'existence d'un NE.

1. Soit M une affectation, $f_1(L_1) \geq f_2(L_2) \geq \cdots \geq f_m(L_m)$
2. $t \leftarrow 1$ et $M_0 \leftarrow M$
3. Tant qu'$\exists$ une tâche j qui veut migrer de i vers k dans M_t, faire
   1. $M_{t+1} \leftarrow M_t \oplus$ déplacement de j de i vers k
   2. $t \leftarrow t + 1$
4. M_t est un équilibre de Nash.



Travaux sur ce jeux

- Existence d'un équilibre de Nash pur sur le jeu d'allocation
- Calcul polynomial d'un équilibre de Nash pur (Algorithme de LPT) [Fotakis et al.2002]
- Étude d'un coût social grâce au prix de l'anarchie

$$\text{Prix de l'anarchie} = \max_{Equilibre\ \ de\ \ Nash\ \ E} \frac{Cout(E)}{OPT}$$

	Machines Identiques	Unif. Reliées
Pur	$2 - \frac{1}{m}$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$
Mixte	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log m}\right)$	$\Theta\left(\frac{\log m}{\log\log\log m}\right)$

- 1999 : Koutsoupias & Papadimitriou
- 2001 : Mavronicolas & Sirakis
- 2002 : Czumaj & Vöcking

Dynamiques du jeu

Principes

- n joueurs, avec un nombre fini de stratégies.
- Le jeu est répété.

  A chaque top t , les joueurs choisissent leurs stratégies.
- Le système peut-il converger vers un équilibre de Nash ?

On cherche à “apprendre” les équilibres de Nash.

Apprentissage d'un équilibre de Nash : Le problème à résoudre

- $q_i(t)$: stratégie employée par joueur i au temps t.
- Algorithme d'apprentissage :
  $q_i(t+1) = Fonction - ou - Algorithme(\{q_j(t')\}_{j \text{ joueur}, t' \leq t})$
- Le problème : Déterminer un algorithme d'apprentissage tel que, pour tout i,

$$\text{lorsque } t \to \infty, \qquad q_i(t) \to q_i^*$$

où $(q_1^*, \cdots, q_N^*)$ est un N.E

Variantes

- Quels équilibres de Nash ?
  - Equilibre de Nash particulier / Equilibres de Nash purs / Equilibres de Nash mixtes
- Qu'est ce qu'un algorithme ?
  - Algorithme Centralisé/Distribué ?
- Jeu à information complète/incomplète :
  - quelles sont les connaissances des joueurs ?

Une première dynamique

Première dynamique

Theorem (Even-Dar et al 2003)

La dynamique suivante :

- *chaque joueur joue l'un à près l'autre ;*
- *chaque joueur i, lorsque c'est son tour, migre sa tâche vers la machine de charge minimale, s'il améliore son coût.*

atteint ultimement un équilibre de Nash pur.

Preuve inspirée de l'existence d'un équilibre de Nash.

- Un état est définit par un vecteur et par une norme
- Chaque déplacement permet de décroitre la norme du nouveau état.

Première dynamique

Theorem (Even-Dar et al 2003)

La dynamique suivante :

- *chaque joueur joue l'un à près l'autre ;*
- *chaque joueur i, lorsque c'est son tour, migre sa tâche vers la machine de charge minimale, s'il améliore son coût.*

atteint ultimement un équilibre de Nash pur.

Preuve inspirée de l'existence d'un équilibre de Nash.

- Un état est définit par un vecteur et par une norme
- Chaque déplacement permet de décroitre la norme du nouveau état.

Extentions de ces résultats [Even-Dar et al 2003]

Extention du précédent résultat

1. au modèle “machines identiques”, “unif. reliées”, “général”.
2. la sélection de joueurs peut se réaliser en fonction de différents critères comme l'ordre FIFO, un ordre sur les longueurs des tâches, sur la charge des machines...

Résultats :

- Convergence vers un équilibre de Nash pur.
- Borne sur le nombre de d'étapes pour l'atteindre.

Une version stochastique

Dynamique stochastique de [Berenbrink et al 2006]

Faire en parallèle pour chaque tâche (unitaire) i

1. Soit j la machine hébergeant i
2. Choisir aléatoirement uniformément une machine ℓ
3. si $L_\ell(t) < L_j(t)$ alors
    1. migrer la tâche i de j vers ℓ avec une probabilité $1 - \frac{L_j(t)}{L_\ell(t)}$

En utilisant cette politique, le système atteint un ϵ-équilibre de Nash en un temps espéré de $O(\log \log n) + m^4)$ $(n >> m)$.

Dynamique stochastique de [Berenbrink et al 2006]

Faire en parallèle pour chaque tâche (unitaire) i

1. Soit j la machine hébergeant i
2. Choisir aléatoirement uniformément une machine ℓ
3. si $L_\ell(t) < L_j(t)$ alors
    1. migrer la tâche i de j vers ℓ avec une probabilité $1 - \frac{L_j(t)}{L_\ell(t)}$

En utilisant cette politique, le système atteint un ϵ-équilibre de Nash en un temps espéré de $O(\log \log n) + m^4)$ $(n >> m)$.

Autre dynamique (équilibres mixtes)

Algorithme LRI [Sastry et al. 94]

$q_i(t) = [q_{i,1}(t), \cdots, q_{i,m_i}(t)]$: vecteur de distribution de probabilité sur S_i au temps t.

Algorithme (LRI= Linear Reward Inaction) [Sastry et al. 94]

- $q_i(0)$ vecteurs quelconques, pour tout i.
- Faire en parallèle pour chaque tâche i
  1. Choisir une machine $j = a_i$ selon stratégie mixte $q_i(t)$.
  2. On obtient un profit $r_i(t) = 1 - c_i(t)$.
  3. Mettre à jour $q_i(t)$ selon

$$q_i(t+1) = q_i(t) + br_i(t)(e_{a_i} - q_i(t))$$

avec b paramètre.

Etude de cette dynamique

3 étapes.

- Etape 1 : De discret vers continu.
- Etape 2 : Analyse du système continu.
- Etape 3 : Convergence du système continu.

Etude

- $Q(t) = (q_1(t), \cdots, q_n(t)) \in K$.

$$K = \left\{ \begin{array}{l} Q \in [0,1]^{m_1+\cdots+m_n} | Q = (q_1, \cdots, q_n), \\ q_i \text{ vecteur de probabilité de dimension } m_i \end{array} \right\}$$

- Dynamique de la forme :

$$Q(t+1) = Q(t) + bG(Q(t), a(t), c(t)).$$

où

  - $a(t) = (a_1(t), \cdots, a_n(t))$ machines choisies au temps t.
  - $c(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$ coûts correspondants.
  - $G(.)$ la dynamique donnée par l'équation de mise à jour précédente.

Théorème 1 [Sastry et al. 94].

- On étend $Q : \mathbb{N} \to K$ en $Q^b : \mathbb{R} \to K$, par

$$Q^b(t) = Q(k), t \in [kb, (k+1)b[.$$

- On s'intéresse à la limite de $Q^b(.)$, lorsque $b \to 0$.

- Posons $g(Q) = E[G(Q(t), a(t), c(t)) | Q(t) = Q]$.

- On dit qu'une suite Q_n de mesures converge faiblement vers Q, si $E[f(Q_n)] \to E[f(Q)]$ pour toute fonction $f(.)$ continue et bornée.

Théorème 1 [Sastry et al. 94].

Theorem (Théorème 1. de [Sastry et al. 94])

Soit $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$*. La suite* $Q^b(.)$ *converge faiblement lorsque* $b \to 0$ *vers* $X(.)$ *solution de l'équation différentielle*

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

- Preuve : Théorème 3.2 de Kushner, "Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory".

Théorème 1 [Sastry et al. 94].

Theorem (Théorème 1. de [Sastry et al. 94])

Soit $X_0 = Q^b(0) = Q(0)$. La suite $Q^b(.)$ converge faiblement lorsque $b \to 0$ vers $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

- Preuve : Théorème 3.2 de Kushner, "Approximation and Weak Convergence Methods for Random Processes, with Applications to Stochastic Systems Theory".

Majorer l'erreur : Cas $f_j(L) = \alpha_j L + \beta_j$

Notons $\epsilon(t) = ||E[Q^b(t)] - X(t)||$, où $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

Theorem

On a

$$\epsilon(t) \leq b\Lambda(e^{\Lambda t} - 1)$$

avec $\Lambda = 2(nAW + B)$, $A = \max_j \alpha_j$, $W = \max_j w_j$, $B = \max_j \beta_j$.

Si on s'intéresse à la limite de $Q^b(.)$, lorsque $b \to 0$:

$$E[Q^b(t)] \to X(t).$$

Pourquoi ?

Majorer l'erreur : Cas $f_j(L) = \alpha_j L + \beta_j$

Notons $\epsilon(t) = ||E[Q^b(t)] - X(t)||$, où $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

Theorem

On a

$$\epsilon(t) \leq b\Lambda(e^{\Lambda t} - 1)$$

avec $\Lambda = 2(nAW + B)$, $A = \max_j \alpha_j$, $W = \max_j w_j$, $B = \max_j \beta_j$.

Si on s'intéresse à la limite de $Q^b(.)$, lorsque $b \to 0$:

$$E[Q^b(t)] \to X(t).$$

Pourquoi ?

Majorer l'erreur : Cas $f_j(L) = \alpha_j L + \beta_j$

Notons $\epsilon(t) = ||E[Q^b(t)] - X(t)||$, où $X(.)$ solution de l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dt} = g(X), \qquad X(0) = X_0.$$

Theorem

On a

$$\epsilon(t) \leq b\Lambda(e^{\Lambda t} - 1)$$

avec $\Lambda = 2(nAW + B)$, $A = \max_j \alpha_j$, $W = \max_j w_j$, $B = \max_j \beta_j$.

Si on s'intéresse à la limite de $Q^b(.)$, lorsque $b \to 0$:

$$E[Q^b(t)] \to X(t).$$

Pourquoi ?

Conséquences

- L'étude de la limite de la dynamique se ramène à l'étude de l'équation différentielle.

- Si celle-ci est asymptotiquement stable vers un N.E. alors la dynamique le sera.

Etape 2 : Etude du système continu

Etude de l'équation différentielle

- Composante par composante, l'équation différentielle est

$$\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = -q_{i,\ell}[h_{i,\ell}(Q) - \overline{h_i}(Q)], \quad 1 \leq \ell \leq m_i, 1 \leq i \leq n$$

- avec $\overline{h_i}(Q) = \sum_s q_{i,s} h_{i,s}(Q)$

- I.e. : une dynamique de réplication

- $h_{i,\ell}(Q) =$ $E[c_i|\ 1 \leq j \leq n, j \neq i$ utilise stratégie q_j, et i utilise la stratégie $\ell]$

Théorie Evolutionnaire des Jeux

Dynamique de réplication : $\frac{dq_{i,\ell}}{dt} = -q_{i,\ell}[h_{i,\ell}(Q) - \overline{h_i}(Q)]$

Theorem (Folk Theorem)

- *Les coins de K sont stationnaires.*
- *Les équilibres de Nash sont stationnaires.*
- *Tous les points stationnaires qui ne sont pas des équilibres de Nash sont instables.*
- *Tous les coins de K qui sont des équilibres de Nash stricts (en stratégies pures) sont asymptotiquement stables.*

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ...(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ...(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas . . .(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

En clair

Cela signifie :

1. peut-être qu'on converge, peut-être pas ...(dans le cas général)
2. si l'on converge, on converge vers un N.E.
3. N.E. pur + strict implique localement asymptotiquement stable.

Etape 3 : Garantir la convergence

Garantir la convergence

Theorem (extension de [Sastry et al 94])

Soit $F : K \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable positive ou nulle telle que pour des constantes $w_i > 0$,

$$\forall Q, \forall i, \forall \ell, \ \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q) \tag{1}$$

Alors, il y a convergence vers un N.E.

Preuve :

$$\frac{d}{dt} F(Q(t)) \leq 0$$

Pourquoi ?

Garantir la convergence

Theorem (extension de [Sastry et al 94])

Soit $F : K \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable positive ou nulle telle que pour des constantes $w_i > 0$,

$$\forall Q, \forall i, \forall \ell, \ \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q) \tag{1}$$

Alors, il y a convergence vers un N.E.

Preuve :

$$\frac{d}{dt} F(Q(t)) \leq 0$$

Pourquoi ?

Fonction magique, dans le cas $f_j(L) = a_j L + b_j$

La fonction

$$F(Q) = \sum_{k=1}^{m} \left[b_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j + \frac{a_k}{2} (\sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j)^2 + a_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j^2 (1 - \frac{q_{j,k}}{2}) \right]$$

vérifie $\frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q)$

Corollary

Il y a convergence vers un N.E. dans ce cas

Fonction magique, dans le cas $f_j(L) = a_j L + b_j$

La fonction

$$F(Q) = \sum_{k=1}^{m} \left[b_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j + \frac{a_k}{2} (\sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j)^2 + a_k \sum_{j=1}^{N} q_{j,k} w_j^2 (1 - \frac{q_{j,k}}{2}) \right]$$

vérifie $\frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) = w_i \times h_{i,\ell}(Q)$

Corollary

Il y a convergence vers un N.E. dans ce cas

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Résumé

1. La dynamique converge (faiblement) vers la solution d'une dynamique de réplication
2. La dynamique de réplication converge
3. Les limites ne peuvent être que des N.E.

4. La dynamique apprend donc bien les N.E.

Travaux en cours : ce problème

- Fidélité de la dynamique continue par rapport à la dynamique discrète :
  - borne sur l'erreur au temps t
- Temps de convergence :
  - Etant donné ϵ, quel temps faut-il pour atteindre un ϵ-équilibre de Nash ?
- Extension au cas général :
  - Existe t'-il une fonction de Liapunov F dans le cas général ?
  - Autre argument qu'un argument via une fonction de Liapunov ?

Extensions

- Résultats de convergence pour d'autres problèmes ?
  - Problème du routage entre noeuds
  - Réseaux de Wardrop
- D'autres dynamiques ?
  - dynamique stochastique ?
  - autres algorithmes d'apprentissage ?

Dérivée de $F(Q(t))$: Première considération

Lemma

$$\sum_{\ell}\sum_{s} q_{i,\ell}q_{i,s}h_{i,\ell}h_{i,s} = (\sum_{\ell} q_{i,\ell}h_{i,\ell})^2$$

Dérivée de $F(Q(t))$: Calculons

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(Q(t))}{dt} &= \sum_{i,\ell} \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}} \frac{dq_{i,\ell}}{dt} \\
&= -\sum_{i,\ell} \frac{\partial F}{\partial q_{i,\ell}}(Q) q_{i,\ell} \sum_s q_{i,s}[h_{i,\ell}(Q) - h_{i,s}(Q)] \\
&= -\sum_{i,\ell} w_i h_{i,\ell}(Q) q_{i,\ell} \sum_s q_{i,s}[h_{i,\ell}(Q) - h_{i,s}(Q)] \\
&= -\sum_i w_i \sum_\ell \sum_s q_{i,\ell} q_{i,s}[h_{i,\ell}(Q)^2 - h_{i,\ell}(Q) h_{i,s}(Q)] \\
&= -\sum_i w_i [\sum_\ell q_{i,\ell}(\sum_s q_{i,s}) h_{i,\ell}(Q)^2 - (\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2] \\
&= -\sum_i w_i [\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell}(Q)^2 - (\sum_\ell q_{i,\ell} h_{i,\ell})^2] \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

by Jensen's Lemma.

back

Borner l'erreur

- Dynamique de la forme :

$$Q(t+1) = Q(t) + bG(Q(t), a(t)).$$

où

  - $a(t) = (a_1(t), \cdots, a_n(t))$ machines choisies au temps t.
  - $c(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))$ coûts correspondants.
  - $G(.)$ la dynamique donnée par l'équation de mise à jour précédente.

- Donc

$$\begin{array}{rcl} E[Q(n)] & = & E[Q(0)] + \sum_{t=1}^{n} E[Q(t+1) - Q(t)] \\ & = & Q(0) + \sum_{t=1}^{n} bE[G(Q(t), a(t))] \\ & = & Q(0) + \sum_{t=1}^{n} bg(Q(t)) \end{array}$$

où $g(Q(t)) = E[G(Q(t), a(t))]$

(le choix de $a(t)$ est fait selon $Q(t)$)

- Considérons la fonction $X(t)$ solution du problème de Cauchy $X(0) = Q(0) = Q^b(0)$, $\frac{dX}{dt} = g(X(t))$.
- Posons $\epsilon(t) = ||E[Q^b(t)] - X(t)||$
- Supposons $g(.)$ Λ-lispchitienne : $||g(x) - g(x')|| \leq \Lambda||x - x'||$
- $$\begin{aligned} \epsilon((n+1)b) &= ||bg(Q^b(nb)) + Q^b(nb) \\ &\quad - \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt' - X(nb)|| \\ &\leq \epsilon(nb) + b||g(Q^b(nb)) - g(X(nb))|| \\ &\quad + ||bg(X(nb)) - \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt'|| \\ \epsilon((n+1)b) &\leq (1 + \Lambda b)\epsilon(nb) + e(nb) \end{aligned}$$

  avec $e(nb) = || \int_{nb}^{(n+1)b} g(X(t'))dt' - bg(X(nb)) \leq M\frac{b^2}{2}$ avec $M = \sup_t g^{(2)}(t) = \sup_t \frac{dg(X(t))}{dt}$.

- Lemme de Gronwall ...

$$\begin{aligned} \epsilon(nb) &\leq e^{\Lambda nb}\epsilon(0) + M\frac{b^2}{2}\frac{(1+\Lambda b)^n - 1}{\Lambda b} \\ &\leq M\frac{b^2}{2}\frac{e^{\Lambda nb}-1}{\Lambda b} \end{aligned}$$

  puisque $\epsilon(0) = 0$ et $(1+u)^n \leq e^{nu}$, avec
- Sur notre dynamique ...
- $$\epsilon(t) \leq b\Lambda(e^{\Lambda t} - 1)$$

  avec $\Lambda = 2(nAW + B)$, $A = \max_j \alpha_j$, $W = \max_j w_j$, $B = \max_j \beta_j$.

  Retour